

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS QUÍMICAS

Departamento de Ciencia de los Materiales e Ingeniería Metalúrgica



TESIS DOCTORAL

Estabilidad de matrices avanzadas de combustible "Th-pu MOX" en condiciones de almacén = Stability of advanced nuclear fuel "Th-pu MOX" under repository conditions

MEMORIA PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR
PRESENTADA POR

María Nieves Rodríguez Villagra

DIRECTOR:

Javier, dir Quiñones Díez

Madrid, 2015

IT
UCM
1989

530.1(043.2)

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Facultad de Ciencias Físicas

Departamento de Física Teórica

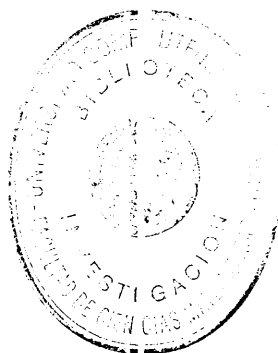


UNIVERSIDAD COMPLUTENSE



5324909334

**ESTABILIDAD DE CIERTAS ONDAS SOLITARIAS
SOMETIDAS A PERTURBACIONES
ESTOCASTICAS**



María Jesús Rodríguez Plaza

Madrid, 1989

Colección Tesis Doctorales. N.º 24/89

© María Jesús Rodríguez Plaza

Edita e imprime la Editorial de la Universidad
Complutense de Madrid. Servicio de Reprografía
Escuela de Estomatología. Ciudad Universitaria
Madrid, 1989
Ricoh 3700
Depósito Legal: M-3427-1989

**ESTABILIDAD DE CIERTAS ONDAS SOLITARIAS
SOMETIDAS A PERTURBACIONES ESTOCASTICAS**

Memoria que presenta
María Jesús Rodríguez Plaza
para optar al grado de
Doctor en Ciencias Físicas
Director: Prof. Luis Vázquez Martínez
Universidad Complutense, Madrid, Mayo de 1988

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el Departamento de Física Teórica de la Universidad Complutense de Madrid bajo la dirección del Prof. Luis Vázquez Martínez. A él le quiero expresar mi mayor gratitud por su ayuda, estímulo y dedicación.

También quiero expresársela al Prof. Luis Antonio Fernández Pérez, quien me ha enseñado todo cuanto sé de ordenadores.

Al Prof. Antonio Muñoz Sudupe le agradezco sus orientaciones al comenzar a usar \TeX .

INDICE

	Página
Introducción	1
Parte I: Estudio analítico de la ecuación	8
Capítulo 1. La ecuación del modelo ϕ^4 no-lineal y sus propiedades	9
1.1 Introducción	9
1.2 El modelo ϕ^4 no-lineal	10
1.3 La ecuación de Sine-Gordon	14
1.4 Integrabilidad de ϕ^4 y propiedad de Painlevé	17
Capítulo 2. Ecuación de Schrödinger unidimensional con un potencial de Hylleraas	30
2.1 Introducción	30
2.2 Estados ligados y sus energías correspondientes	31
2.3 Estados de colisión	35
2.4 Aplicación al caso $V(x) = 2 - 3 \cosh^{-2}(x/\sqrt{2})$	37
Capítulo 3. El efecto de pequeñas perturbaciones sobre el comportamiento de los kinks	39
3.1 Introducción	39
3.2 Efecto de pequeñas perturbaciones sobre la dinámica de los kinks del modelo ϕ^4	40
3.3 Aproximación adiabática y obtención de las ecuaciones de los parámetros del kink en primera aproximación	44
3.4 Problemas que surgen con el empleo de leyes de conservación	47

3.5 Ecuación se Sine-Gordon	50
Capítulo 4. Correcciones analíticas a la solución no- perturbada	
en primer y segundo orden	53
4.1 Introducción	53
4.2 Descripción del método perturbativo	54
4.3 Aplicación al caso $F = -bq$ con b constante	56
4.4 Aplicación al caso disipativo $F = -\alpha q_t$	69
Capítulo 5. Perturbaciones estocásticas localizadas en el espacio	
y dependientes del tiempo	74
5.1 Introducción	74
5.2 Ecuaciones de Langevin de la dinámica de los kinks del modelo ϕ^4	75
5.3 Ecuación de Fokker- Planck	81
5.4 Resolución de las ecuaciones de los valores medios	
para kinks no-relativistas	88
5.5 Aplicación a la ecuación de Sine-Gordon	92
Capítulo 6. Resolución exacta de la densidad de probabilidad	
de velocidades en el caso aditivo	99
6.1 Introducción	99
6.2 Valor medio de orden n del momento	100
6.3 Solución exacta de $\langle v^2 \rangle, \langle v^4 \rangle$ y $\langle v^6 \rangle$ en función del tiempo . .	103
6.4 Expresión explícita de $W(v, t)$	110
Parte II: Estudio numérico de la ecuación	112
Capítulo 7. Integración numérica de ϕ^4 con perturbación	113
7.1 Introducción	113
7.2 Esquema numérico para el modelo ϕ^4 sin perturbar	114

7.3 Centro de energías y velocidad	119
7.4 Efectos en la frontera	121
7.5 Convergencia y estabilidad del esquema	124
7.6 Esquema numérico para la ecuación perturbada	126
7.7 Simulación numérica del ruido	130
7.8 Condiciones impuestas en la integración numérica	133
7.9 Gráficas	135
Conclusiones	147
Apéndice A	150
Apéndice B	161
Apéndice C	167
Apéndice D	177
Referencias	179

INTRODUCCION

Tradicionalmente cuando se estudiaban las excitaciones de un sistema físico sus pequeñas *anarmonicidades* se describían en términos de una teoría lineal y se pensaba en sus estados excitados (fonones, etc) como "casi- partículas". Debido a esas *anarmonicidades* estas ondas (casi-partículas) interaccionaban unas con otras y esa interacción se describía mediante un principio de superposición, que siempre es válido para sistemas lineales.

Esta aproximación está justificada cuando el grado de excitación del sistema estudiado es pequeño, sin embargo cuando no lo es, el método de descripción basado en una teoría lineal es inadecuado para el fenómeno físico, y el principio de superposición no funciona.

A pesar de esto, la idea de casi- partícula como excitación elemental, pero no-lineal, de un sistema se puede seguir conservando si se introduce un objeto no-lineal: la onda solitaria o el solitón.

De forma análoga a las casi- partículas, la interacción de solitones es elástica (estrictamente hablando eso sólo es cierto para los llamados sistemas *completamente integrables*) y después de la colisión cada uno de ellos conserva asintóticamente su forma y velocidad inicial, originando el complejo proceso de interacción sólo un cambio de fase en los solitones.

Este cambio de fase para un solitón dado es la suma algebraica de los cambios

de fase causados por la colisión con cada uno de los otros solitones individualmente, y no cabe duda de que el hecho de poder representar la excitación total como la suma de excitaciones elementales juega un papel muy importante en la construcción matemática de una teoría de casi-partículas.

Esto es lo que se hace cuando se expresan las excitaciones en series o integrales de Fourier, y la esencia del método consiste en pasar a unas nuevas variables que simplifiquen la ecuación estudiada.

El paso a estas nuevas variables es posible en muchas ecuaciones no-lineales, por ejemplo KdV y Sine-Gordon, pero no lo es cuando se aplica a otras ecuaciones. A este cambio de variables se le denomina *Método de la Transformación de Scattering Inverso* (IST) y tiene la ventaja de que evita tener que resolver la ecuación no-lineal, reduciéndola a una ecuación integral lineal equivalente. Es por esto que el método de casi-partículas lineales y la teoría de solitones tienen mucho que ver.

Sin embargo, a pesar de todo esto, solitones y casi-partículas son sustancialmente diferentes pues, por ejemplo, los solitones a menudo poseen grados de libertad internos adicionales, y una misma ecuación no-lineal puede presentar solitones de una o varias clases particulares, mientras que la diferencia entre casi-partículas correspondientes a diferentes sistemas sólo radica en distintas relaciones de dispersión.

Hasta aquí nos hemos referido solamente a modelos con ecuaciones no-lineales que describen situaciones físicas ideales, pero en las aplicaciones prácticas se hace necesario investigar las interacciones de solitones con inhomogeneidades del medio o fuerzas externas.

Desde el punto de vista matemático esto significa que las soluciones de estas

ecuaciones no-lineales difieren de las mencionadas anteriormente por la presencia de pequeñas correcciones adicionales, que dependen explícitamente de las coordenadas y del tiempo. La razón por la que se requiere que estas correcciones sean pequeñas es evitar variaciones sustanciales de la solución en tiempos finitos.

En muchas situaciones físicas el sistema de soluciones se ve afectado por perturbaciones externas aleatorias, como por ejemplo el caso de un sólido a temperatura finita, donde las fluctuaciones térmicas pueden originarle defectos en la red cristalina. Esto señala la necesidad de estudiar la dinámica de los solitones en medios fluctuantes o inhomogéneos estocásticamente y bajo la acción de fuerzas aleatorias. Por supuesto, la descripción del sistema tiene que ser estadística. Conviene explicar aquí qué se entiende por tal descripción.

Puesto que no hay métodos prácticos que resuelvan las ecuaciones no-lineales asociadas a estos sistemas, ni es posible obtener las ecuaciones para el valor medio de un campo, ni sus correspondientes correlaciones de órdenes superiores, es necesario recurrir a procedimientos tales como la teoría de perturbaciones basada en la linealización y se requiere como requisito indispensable el que las fuerzas aleatorias sean pequeñas. En este caso la descripción estadística se reduce a encontrar los momentos de las correlaciones a la solución inicial, los más interesantes de los cuales son los cuadráticos.

El problema que surge principalmente en esta aproximación está relacionado con la convergencia de la serie obtenida al desarrollar en el parámetro pequeño.

Aún así, en algunas situaciones es posible obtener soluciones exactas sobre las que se toman valores medios, supuestamente conocidas las características

estadísticas de las funciones aleatorias.

Estas funciones tienen que ser seleccionadas adecuadamente para obtener una respuesta real del sistema. Esta es la razón por la que se eligen a menudo campos Gaussianos, pues por virtud del *teorema central del límite* estos campos son los que describen la mayor parte de los procesos prototipo en las variaciones microscópicas de los sistemas, como por ejemplo la presencia de perturbaciones a temperatura finita. Otra razón más es que las propiedades estadísticas de estos campos se conocen muy bien.

Actualmente se trabaja mucho en la teoría de la propagación de ondas solitarias en medios estocásticos.

Mencionaremos ahora alguno de los problemas que permanecen abiertos. Primero: la teoría de perturbaciones estocásticas basada en la transformación de scattering inverso permite estudiar una gran variedad de problemas y obtener de ellos mucha información, por ejemplo, mediante las denominadas ecuaciones adiabáticas. Sin embargo este método no describe bien otro tipo de sistemas no-lineales que no son resolubles mediante IST. Segundo: es importante generalizar la descripción de la dinámica de los solitones en campos inhomogéneos con campos cuyas propiedades estadísticas difieran de los Gaussianos. Hasta el momento esto casi no se han estudiado y son los problemas que aparecen cuando se investiga la turbulencia en plasmas. Tercero: generalmente hasta el momento todos los trabajos existentes se limitan a calcular un número de valores medios y sus fluctuaciones, pero una descripción estadística completa requiere cálculos de las funciones de correlación de los campos no-lineales y las densidades de probabilidad para varios tiempos de sus parámetros. Cuarto: aunque durante un considerable periodo de tiempo la teoría de ecuaciones no-lineales ha estado basada en experimentos

numéricos, la complejidad de llevarlos a cabo en el caso de sistemas estocásticos no-lineales ha restringido las posibilidades de un análisis numérico sobre estos problemas. Son necesarias, pues, más aplicaciones de métodos numéricos a la investigación de soluciones de ecuaciones estocásticas no-lineales, ya que ayudarán al progreso de la descripción teórica de estos sistemas.

En la presente memoria abordamos algunas de las cuestiones que acabamos de mencionar: El esquema de la misma es el siguiente:

En la primera parte se hace un estudio analítico de la ecuación del modelo ϕ^4 perturbado. Este sistema tiene gran interés físico por sus numerosas aplicaciones: el primer uso importante fue en la teoría fenomenológica de Ginzburg- Landau de las transiciones de fase de segundo orden [1], y más recientemente el estudio a nivel microscópico de las transiciones de fase en ferromagnéticos [2]. Otra aplicación distinta ha sido a la teoría de excitaciones no-lineales en cadenas de polímeros lineales. En Teoría Cuántica de Campos se ha utilizado para ilustrar la conexión entre excitaciones clásicas no-lineales y partículas cuánticas [3], [4] y en física nuclear como un modelo acoplado a fermiones e ilustrativo de los efectos no-triviales de la topología en el número de fermiones.

Este modelo tiene la ventaja de poseer una solución de tipo kink semejante cualitativamente a los de Sine-Gordon, pero tiene también el inconveniente de no ser integrable.

Al perturbar sistemas integrables, los efectos que produce la perturbación se pueden calcular modificando adecuadamente los resultados obtenidos de la aplicación del método del scattering inverso a la ecuación no-perturbada. De esta

manera se sabe mucho de KdV perturbado, de Schrödinger no-lineal y de Sine-Gordon, pero en nuestro caso este análisis no era posible.

Por lo tanto para estudiar el efecto de pequeñas perturbaciones sobre nuestro sistema hemos tenido que recurrir a dos procedimientos: emplear las leyes de conservación (no conocemos más que dos) modificadas adecuadamente de manera que den cuenta de la dinámica del kink en primera aproximación, y de un método perturbativo a la solución casi- estacionaria. Este último tiene la ventaja de proporcionar las correcciones a la solución no perturbada en potencias de un parámetro pequeño. Sin embargo, la serie obtenida sólo es convergente en una cierta región de las variables, y no es uniforme.

En la aplicación de este método perturbativo , los problemas lineales que aparecen están directamente relacionados con la ecuación de Schrödinger para un potencial de Hylleraas, por lo que hemos calculado las soluciones correspondientes a estados ligados y de colisión de esta ecuación.

El efecto de las perturbaciones sobre las ondas iniciales puede interpretarse en primer orden como una modulación temporal de los parámetros característicos de la onda. Hemos calculado cuales han de ser estas variaciones para los casos de un ruido aditivo y multiplicativo, suponiendo que las perturbaciones estaban descritas por campos Gaussianos estacionarios, localizados en el espacio y dependientes del tiempo. Hemos comparado el resultado con el que se obtiene para la ecuación de Sine-Gordon. Las soluciones explícitas para solitones no- relativistas han sido calculadas.

Por último, también se ha calculado explícitamente $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^4 \rangle$ y $\langle v^6 \rangle$ para solitones relativistas en el caso de un ruido aditivo con disipación, así como la densidad de probabilidad de velocidades asociada.

En la segunda parte se ha estudiado numéricamente la ecuación, discutiéndose los diferentes esquemas numéricos a utilizar así como las cantidades conservadas asociadas a ellos. Los efectos en la frontera, la convergencia y estabilidad del esquema también han sido discutidos aquí.

En el último capítulo se recogen los resultados obtenidos numéricamente, pudiéndose comprobar que para ruidos débiles y tiempos pequeños el kink es estable y se comporta tal y como predice la teoría en todos los casos tratados. Estos han correspondido a ruidos aditivos y multiplicativos con o sin disipación. A grandes tiempos no poseemos ninguna predicción teórica, aunque es posible obtener resultados numéricos.

Para ruidos fuertes la forma de la onda inicial cambia totalmente, incluso para tiempos pequeños.

- 3 -

PARTE I

ESTUDIO ANALITICO DE LA ECUACION

CAPITULO 1

La ecuación del modelo ϕ^4 no-lineal y sus propiedades

1.1 Introducción

En la primera parte de este capítulo se muestra la forma de la ecuación del modelo ϕ^4 que vamos a estudiar a lo largo de todo este trabajo. Como en el futuro vamos a emplear algunas de sus cantidades conservadas, también éstas se definen aquí, y se describen algunas soluciones de onda viajera de tipo kink.

Debido a que muchos de los resultados que obtengamos los vamos a comparar con los que se habrían deducido para la ecuación de Sine-Gordon, también se mencionan aquí las propiedades de esta ecuación que más nos interesan.

En la última parte del capítulo se trata la integrabilidad de ambas ecuaciones utilizando la conjetura de Ablowitz, Ramani y Segur y se estudia la propiedad de Painlevé de las mismas.

1.2 El modelo ϕ^4 no-lineal

La ecuación que vamos a estudiar a lo largo de todo este trabajo es la ecuación no lineal en derivadas parciales y en una dimensión espacial

$$\frac{1}{c^2} \phi_{tt} - \phi_{xx} - m^2 \phi + g \phi^3 = 0, \quad g > 0 \quad (1.1)$$

donde $\phi = \phi(x, t)$, x y t son reales, c es la velocidad de la luz y m y g son constantes. Es un caso particular de campo escalar proveniente de la densidad lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \phi_t^2 - \phi_x^2 \right] - g(\phi), \quad (1.2)$$

donde $g(\phi)$ está dado por la función

$$g(\phi) = \frac{m^4}{4g} \left(\frac{g}{m^2} \phi^2 - 1 \right)^2. \quad (1.3)$$

El factor ϕ^4 que aparece aquí es del que toma el nombre la ecuación.

De la misma densidad lagrangiana (1.2), pero para el caso

$$g(\phi) = \frac{m^4}{g} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{g}}{m} \phi \right)$$

se obtiene como ecuación de evolución la ecuación de Sine-Gordon

$$\frac{1}{c^2} \phi_{tt} - \phi_{xx} + \frac{m^3}{\sqrt{g}} \left(\sin \frac{\sqrt{g}}{m} \phi \right) = 0. \quad (1.4)$$

Mediante un análisis dimensional es fácil ver que $[\mathcal{L}] = AL^{-2}$, $[\phi] = A^{1/2}$, $[m] = L^{-1}$ y $[g] = A^{-1}L^{-2}$, donde por A se denota la dimensión de una acción.

De ahora en adelante, y en todo lo que sigue tomaremos siempre la velocidad de la luz como unidad de velocidades, es decir. $c = 1$.

Haciendo el cambio de variable

$$u(x, t) = \frac{\sqrt{g}}{m} \phi\left(\frac{x}{m}, \frac{t}{m}\right), \quad (1.5)$$

(1.1) se transforma en

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0, \quad (1.6)$$

que será la forma en la que habitualmente escribiremos esta ecuación. Las nuevas variables x , t y u son ahora cantidades adimensionales. La ecuación (1.6) es invariante bajo la transformación del grupo de Poincaré

$$\begin{aligned} u(x, t) &\rightarrow u'(x', t') = u(x, t), \\ t' &= \gamma(t + vx) + a \\ x' &= \gamma(x + vt) + b, \end{aligned}$$

donde $\gamma^2 \equiv (1 - v^2)^{-1}$ y v , a , b son constantes reales. Asimismo, si $u(x, t)$ es solución de (1.6), también lo es $-u(x, t)$.

Una ley de conservación asociada a la ecuación (1.6) es una expresión de la forma

$$T_t + X_x = 0 \quad (1.7)$$

donde T es la densidad conservada y X es el flujo conservado, siendo T y X funcionales de u y de sus derivadas. Las cantidades

$$T_1 \equiv \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 \geq 0, \quad (1.8a)$$

$$T_2 \equiv -u_x u_t, \quad (1.8b)$$

son densidades conservadas por la ecuación (1.6), suponiendo que tanto u como sus derivadas decrecen con suficiente rapidez en $|x| \rightarrow \infty$. Los flujos correspondientes son:

$$X_1 \equiv -u_x u_t, \quad (1.9a)$$

$$X_2 \equiv \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) - \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2. \quad (1.9b)$$

T_1 está asociada a la densidad de energía y T_2 a la de momento.

Las soluciones explícitas de la ecuación (1.6) de tipo kink (k) y antikink (\bar{k}) para ondas solitarias moviéndose con velocidad v , son [5], [6], [7]

$$u_k(x - vt) = \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0) = -u_{\bar{k}}(x - vt), \quad (1.10)$$

donde x_0 es una constante. Estas soluciones no tienden a cero en el infinito, sino que conectan dos estados de mínimo del potencial $\frac{1}{4}(u^2 - 1)^2$. Para ellas

$$T_1 = \frac{\gamma^2}{2} \cosh^{-4} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0), \quad (1.11a)$$

$$T_2 = \frac{\gamma^2 v}{2} \cosh^{-4} \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0). \quad (1.11b)$$

La energía y el momento asociados vienen dados por:

$$E \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1 = \frac{4\gamma}{3\sqrt{2}}, \quad (1.12)$$

$$P \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_2 = \frac{4\gamma v}{3\sqrt{2}}. \quad (1.13)$$

Las densidades T_1 y T_2 sí están localizadas en el espacio para las soluciones consideradas.

Asociadas a (1.6) pueden definirse otras cantidades como la masa

$$M^2 \equiv E^2 - P^2 \quad (\text{invariante relativista}) \quad (1.14)$$

y el centro de energías

$$X_c \equiv \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x T_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \, T_1}, \quad (1.15)$$

que para la soluciones (1.10) son, respectivamente

$$M^2 = \frac{8}{9}, \quad (1.16)$$

$$X_c = vt + x_0. \quad (1.17)$$

El modelo ϕ^4 tiene además otra propiedad global importante, como es la de ser *no-integrable*. Se dice que una ecuación en derivadas parciales (EDP) no-lineal representa a un sistema integrable cuando puede resolverse mediante la *Transformación del Scattering Inverso* (IST) [8],[9]. Las ecuaciones resolubles por IST son sistemas Hamiltonianos completamente integrables y dicha transformación es una transformación canónica de las variables físicas a un conjunto infinito de variables de acción-ángulo. Los problemas que pueden resolverse por IST poseen una estructura muy rica, pues sus ecuaciones se pueden escribir mediante *pares de Lax* en la forma

$$L_t = [L, M],$$

poseen *transformaciones Bäcklund*, tiene *infinitas leyes de conservación* y admiten *soluciones N-solitonicas* para $N \geq 3$.

Ninguna de estas propiedades las tiene un sistema no-integrable.

1.3 La ecuación de Sine-Gordon

Como hemos visto la ecuación de Sine-Gordon (SG) proviene de la misma densidad lagrangiana que ϕ^4 pero con una $g(\phi)$ diferente. Haciendo en (1.4) el mismo cambio de variable (1.5), se obtiene

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (1.18)$$

que es la forma usual de escribir esta ecuación. SG es también invariante bajo la mencionada transformación de Poincaré y si $u(x, t)$ es solución de (1.18), también lo son $-u$ y $u + 2k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

Las cantidades

$$T_1 \equiv \frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + (1 - \cos u) \geq 0, \quad (1.19a)$$

$$T_2 \equiv -u_x u_t, \quad (1.19b)$$

son densidades conservadas para (1.18), con los correspondientes flujos

$$X_1 \equiv -u_x u_t, \quad (1.20a)$$

$$X_2 \equiv \frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) - (1 - \cos u). \quad (1.20b)$$

Las soluciones de (1.18) de tipo kink (k) y antikink (\bar{k}) moviéndose con velocidad v vienen dadas por

$$u_k(x - vt) = 4 \arctan \exp \gamma(x - vt - x_0) = 2\pi - u_{\bar{k}}(x - vt), \quad (1.21)$$

con x_0 constante. Estas soluciones, al igual que (1.10), también conectan dos mínimos del potencial $(1 - \cos u)$ y son cualitativamente muy similares a las del

modelo ϕ^4 . Nos permitirán comparar y contrastar muchos de los resultados que vayamos obteniendo en lo sucesivo. Para (1.10), T_1 y T_2 vienen dados por

$$T_1 = 4\gamma^2 \cosh^{-2} \gamma(x - vt - x_0), \quad (1.22a)$$

$$T_2 = 4\gamma^2 v \cosh^{-2} \gamma(x - vt - x_0). \quad (1.22b)$$

y E , P , M y X_c por

$$E = 8\gamma, \quad (1.23)$$

$$P = 8\gamma v, \quad (1.24)$$

$$M^2 = 8, \quad (1.25)$$

$$X_c = vt + x_0. \quad (1.26)$$

Al contrario que ϕ^4 , SG sí que representa un sistema integrable y posee, por lo tanto, las propiedades que hemos mencionado anteriormente. Así por ejemplo, si escribimos la ecuación (1.18) en las variables ξ , η del cono de luz cuya definición viene dada por

$$\begin{aligned} \xi &\equiv \frac{1}{2}(x + t) \\ \eta &\equiv \frac{1}{2}(x - t), \end{aligned} \quad (1.27)$$

se tiene que

$$u_{\xi\eta} = \sin u. \quad (1.28)$$

y la transformación Bäcklund de esta ecuación en sí misma tiene la forma [10], [11]

$$\begin{aligned} U_\xi &= -\Psi_\xi + 2\alpha \sin\left(\frac{U - \Psi}{2}\right) \\ U_\eta &= \Psi_\eta + \frac{2}{\alpha} \sin\left(\frac{U + \Psi}{2}\right). \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde α es una constante y U , Ψ son soluciones de (1.28) como se comprueba aplicando la condición de integrabilidad

$$(U_\xi)_\eta = (U_\eta)_\xi$$

a las últimas ecuaciones. Las primeras leyes de conservación de (1.28)

$$D_\xi + F_\eta = 0$$

vienen dadas por [12]

$$\begin{aligned} D_1 &= u_\eta^2/2, & F_1 &= \cos u. \\ D_2 &= u_\eta^4/4 - u_{\eta\eta}^2, & F_2 &= u_\eta^2 \cos u. \\ D_3 &= (1/6)u_\eta^6 - (2/3)u_\eta^2 u_{\eta\eta}^2 + (8/9)u_\eta^3 u_{\eta\eta\eta} + (4/3)u_{\eta\eta\eta}^3, \\ F_3 &= \left[(1/9)u_\eta^4 - (4/3)u_{\eta\eta}^2 \right] \cos u. \end{aligned}$$

Como la ecuación $u_{\xi\eta} = \sin u$ es simétrica en ξ , η , podemos cambiar ξ por η , con lo que aparecerán otras leyes de conservación

$$\begin{aligned} D_1 &= \cos u, & F_1 &= u_\xi^2/2. \\ D_2 &= u_\xi^2 \cos u, & F_2 &= u_\xi^4/4 - u_{\xi\xi}^2. \\ D_3 &= \left[(1/9)u_\xi^4 - (4/3)u_{\xi\xi}^2 \right] \cos u, \\ F_3 &= (1/6)u_\xi^6 - (2/3)u_\xi^2 u_{\xi\xi}^2 + (8/9)u_\xi^3 u_{\xi\xi\xi} + (4/3)u_{\xi\xi\xi}^3. \end{aligned}$$

Las expresiones T_1 , X_1 dadas en (1.19a) y (1.20a) corresponden a

$$\begin{aligned} D_1 &= u_\eta^2/2 + (1 - \cos u), \\ F_1 &= -u_\xi^2/2 - (1 - \cos u), \end{aligned}$$

mientras que T_2 , X_2 lo hacen a

$$D_2 = u_\eta^2/2 - (1 - \cos u),$$

$$F_2 = u_\xi^2/2 - (1 - \cos u).$$

como se comprueba sin ninguna dificultad.

1.4 Integrabilidad de ϕ^4 y propiedad de Painlevé

Vamos a ver en este apartado cómo pueden probarse algunas de las definiciones anteriores referentes a la integrabilidad de la ecuación ϕ^4 . Para ello vamos a seguir el procedimiento expuesto en la referencia [17].

Ya hemos dicho que una EDP no-lineal resoluble mediante IST es integrable. Tal EDP puede resolverse por este método si una cierta función $K(x, x; t)$ es solución de la EDP, donde $K(x, y; t)$ está definida por una ecuación integral del tipo Gel'fand-Levitan-Marchenko (GLM), [13], [14], [15], [16]

$$K(x, y; t) = F(x, y; t) + \int_x^\infty dz K(x, z; t)N(z, y; t),$$

para N una función conocida de F .

Ablowitz, Ramani y Segur [18],[19] probaron que las soluciones de la ecuación de GLM poseen la propiedad de Painlevé [20], [21], lo que les llevó a enunciar la siguiente conjetura:

"Una EDP no-lineal es resoluble mediante IST sólo si *todas* las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) obtenidas por reducción de aquella mediante cambios de variable, tienen la *propiedad de Painlevé*".

Por ejemplo, de la ecuación KdV

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0$$

se sabe que es exactamente resoluble (integrable) bajo ciertas condiciones de contorno. Si a dicha ecuación se le imponen propiedades de simetría se obtiene una ecuación diferencial ordinaria. Así KdV tiene soluciones con invariancia bajo el grupo de Galileo, es decir

$$q \equiv f(z), \quad z \equiv x - ct,$$

si f es solución de

$$f_{xxx} + 6ff_x - cf_x = 0,$$

que una vez integrada da

$$f_{xx} + 3f^2 - cf = \text{const},$$

que se comprueba que posee la propiedad de Painlevé [20].

Luego, una forma de comprobar si una EDP es integrable o no es estudiar la propiedad de Painlevé en todas sus posibles EDO. Esto presenta dos problemas:

- i) Estudiar todas las EDO que se pueden obtener de una EDP es muy difícil, pues no siempre se conocen todas las simetrías de una ecuación.

- ii) La conjetura de Ablowitz *et al.* es una condición necesaria, pero no suficiente, para asegurar la integrabilidad. Para resolver el primer inconveniente Weiss *et al.* [17] trataron de estudiar la propiedad de Painlevé en la EDP directamente, sin recurrir a sus EDO. Esto hacía necesario definir qué se entendía por dicha propiedad en EDP, generalizando el concepto de EDO. En cuanto al segundo problema, si bien la mencionada conjetura no servía para probar cuando una ecuación era integrable, era útil, al menos, para probar cuando no lo era.

Este es el criterio que vamos a emplear para mostrar que ϕ^4 no es integrable: probar que no satisface la propiedad de Painlevé .

Siguiendo [17], daremos la siguiente definición:

Definición : Sea $u(z_1, \dots, z_n)$, $z_i \in C$, $i = 1, 2, \dots, n$ la solución de una EDP. Se dice que una EDP posee la propiedad de Painlevé cuando u se puede escribir como

$$u = u(z_1, \dots, z_n) = \phi^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi^n, \quad (1.30)$$

donde

$$\phi = \phi(z_1, \dots, z_n),$$

$$a_i = a_i(z_1, \dots, z_n), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

son funciones analíticas de z_1, \dots, z_n en un entorno del punto $z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0}$ en el cual

$$\phi(z_{10}, z_{20}, \dots, z_{n0}) = 0$$

y α es un número entero.

Como aplicación de esta definición vamos a emplearla primero en la ecuación de SG

$$u_{zt} = \sin u, \quad (1.31)$$

y luego al modelo ϕ^4

$$u_{xt} = -u + u^3, \quad (1.32)$$

ambas ya escritas en las variables del cono de luz.

1) *Ecuación de Sine-Gordon*

1a) Obtención del término general del desarrollo (1.30).

Mediante el cambio de variable

$$v \equiv e^{iu}, \quad (1.33)$$

(1.31) se transforma en

$$2(vv_{xt} - v_x v_t) - v(v^2 - 1) = 0. \quad (1.34)$$

La única posibilidad de que esta ecuación tenga una solución de la forma (1.30) es que $\alpha = -2$. Introduciendo

$$v = \phi^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi^n, \quad (1.35)$$

con $\phi = \phi(x, t)$, $a_i = a_i(x, t)$, $i = 0, 1, \dots$, en (1.34) y operando se

obtiene el término general:

$$\begin{aligned}
 & 2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=r+2}}^{\infty} (a_i a_{jzt} - a_{iz} a_{jt}) \\
 & + 2 \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=r+3}}^{\infty} \left[(k-l) a_l (a_{kz} \phi_t + a_{kt} \phi_z) + (k-2) a_l a_k \phi_{zt} \right] \\
 & + 2 \sum_{\substack{p,q=0 \\ p+q=r+4}}^{\infty} \left[(p-2)(p-q-1) a_p a_q \phi_z \phi_t \right] \\
 & - \sum_{\substack{a,b,c=0 \\ a+b+c=r+4}}^{\infty} a_a a_b a_c + a_r = 0,
 \end{aligned} \tag{1.36}$$

donde

$$r = -4, -3, -2, \dots$$

$$a_r \equiv 0, \quad \text{cuando } r < 0.$$

Esta expresión permite calcular para un r dado, el coeficiente a_{r+4} .

Algunos de estos coeficientes son:

$$a_0 = 4\phi_z \phi_t, \quad r = -4 \tag{1.37a}$$

$$a_1 = -4\phi_{zt}, \quad r = -3 \tag{1.37b}$$

$$a_2 = \text{indeterminado}, \quad r = -2. \tag{1.37c}$$

Los demás coeficientes a_l , $l \geq 3$ vienen dados en función de a_2 y sus derivadas.

1b) Resonancias

El término general (1.36) también se puede escribir como

$$8(r+2)(r+5)(\phi_z \phi_t)^2 a_{r+4} = f_{r+4}(a_0, a_1, \dots, a_{r+3}), \tag{1.38}$$

donde la función f_{r+4} está definida por:

$$\begin{aligned}
 f_{r+4} \equiv & -2 \sum_{\substack{i,j=0 \\ i+j=r+2}}^{\infty} (a_i a_{jx} - a_{ix} a_{jt}) \\
 & -2 \sum_{\substack{k,l=0 \\ k+l=r+3}}^{\infty} \left[(k-l)a_l(a_{kx}\phi_t + a_{kx}\phi_x) + (k-2)a_l a_k \phi_{xt} \right] \\
 & -2 \sum_{\substack{p,q=0 \\ p+q=r+4 \\ p,q \neq r+4}}^{\infty} \left[(p-2)(p-q-1)a_p a_q \phi_x \phi_t \right] \\
 & + \sum_{\substack{a,b,c=0 \\ a+b+c=r+4 \\ a,b,c \neq r+4}}^{\infty} a_a a_b a_c - a_r = 0, \quad r = -4, -3, \dots
 \end{aligned}$$

siendo ahora los sumatorios en p , q y a , b , c tales que ninguno de dichos números sea igual a $r+4$. Los coeficientes a_2 y a_{-1} (nulo por definición) correspondientes a $r = -2$ y $r = -5$, respectivamente, se denominan *resonancias*. A la vista de estos r para los que se anula el coeficiente de a_{r+4} , se concluye que (1.34) es de tipo P, o admite la propiedad de Painlevé, si y solo si f_2 se anula idénticamente. Esta sería la comprobación de que el desarrollo (1.35) es correcto. Es fácil ver que, en efecto

$$\begin{aligned}
 f_2(a_0, a_1) \equiv & 2(a_{0x}a_{0t} - a_0a_{0xt}) \\
 & + 2[3a_0a_1\phi_{xt} - a_0(a_{1x}\phi_t + a_{1t}\phi_x) + a_1(a_{0x}\phi_t + a_{0t}\phi_x)] \\
 & - 2a_1^2\phi_x\phi_t + 3a_0a_1^2
 \end{aligned}$$

es idénticamente nulo, lo que se comprueba utilizando las definiciones (1.37a) y (1.37b).

Esta es la razón por la que a_2 queda indeterminado.

1c) Transformaciones Bäcklund

El término general (1.36) permite también encontrar las *transformaciones Bäcklund* para la ecuación (1.34). Esto se hace imponiendo condiciones sobre los coeficientes a_n (recuérdese que a_2 es indeterminado), de forma tal que dichos coeficientes sean todos nulos a partir de uno dado. Estas condiciones, que se deducen sin ninguna dificultad de (1.26), son:

$$\begin{aligned} & 2(a_{0x}a_{0t} - a_0a_{0xt}) \\ & + 2\left[3a_0a_1\phi_{xt} - a_0(a_{1x}\phi_t + a_{1t}\phi_x) + a_1(a_{0x}\phi_t + a_{0t}\phi_x)\right] \\ & - 2a_1^2\phi_x\phi_t + 3a_0a_1^2 = 0 \end{aligned} \quad (1.39)$$

que ya sabemos que es nula porque es la condición de compatibilidad,

$$\begin{aligned} & 2(a_0a_{1xt} + a_1a_{0xt} - a_{0x}a_{1t} - a_{0t}a_{1x}) \\ & + 4\left[a_0(a_{2x}\phi_t + a_{2t}\phi_x) - a_2(a_{0x}\phi_t + a_{0t}\phi_x) - a_0a_2\phi_{xt}\right] \\ & - 2a_1^2\phi_{xt} + 4a_1a_2\phi_x\phi_t - 6a_0a_1a_2 - a_1^3 = 0, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} & 2(a_0a_{2xt} + a_2a_{0xt} - a_{0x}a_{2t} - a_{0t}a_{2x}) \\ & + 2(a_1a_{1xt} - a_{1x}a_{1t}) \\ & + 2\left[a_1(a_{2x}\phi_t + a_{2t}\phi_x) - a_2(a_{1x}\phi_t + a_{1t}\phi_x) - a_1a_2\phi_{xt}\right] \\ & - 3a_0a_2^2 - 3a_1^2a_2 + a_0 = 0, \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$2(a_1a_{2xt} + a_2a_{1xt} - a_{1x}a_{2t} - a_{1t}a_{2x}) - 3a_1a_2^2 + a_1 = 0, \quad (1.42)$$

y

$$2(a_2a_{2xt} - a_{2x}a_{2t}) - a_2^3 + a_2 = 0. \quad (1.43)$$

Las condiciones (1.39)-(1.43) obligan a que

$$a_i \equiv 0, \quad \forall i \geq 3$$

y por lo tanto

$$v = \frac{a_0}{\phi^2} + \frac{a_1}{\phi} + a_2 = -4(\ln \phi)_{xt} + a_2. \quad (1.44)$$

Nótese que ahora a_2 ya no es cualquier función sino que tiene que ser **solución** de la ecuación de SG (1.43).

Las transformaciones Bäcklund para el campo de Sine-Gordon son las ecuaciones (1.40), (1.41) y (1.42). Actualmente se trabaja en su simplificación, además de intentar obtener de ellas las transformaciones Bäcklund de SG ya conocidas.

Por último es necesario hacer una aclaración : la expresión (1.36) no solo proporciona el desarrollo (1.37), sino otro además en el que

$$a_0 = a_1 = 0$$

$$a_2, a_3 \quad \text{indeterminados}$$

$$a_j, \quad j \geq 4 \quad \text{en función de } a_2 \text{ y } a_3$$

es decir, un desarrollo analítico

$$v = \sum_{n=2}^{\infty} a_n \phi^{n-2}.$$

La existencia de estos dos desarrollos para una misma solución puede quedar aclarada si comparamos con lo que ocurre sucede en EDO. Como ejemplo

- 25 -

tomaremos la ecuación

$$(W^2 - 1)W'' = 2W(W')^2$$

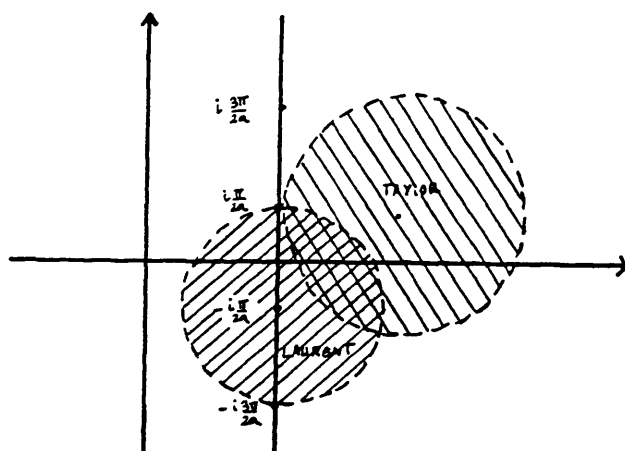
$$W = W(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

cuya solución general es

$$W(z) = \tanh(az + b), \quad a, b \text{ constantes}$$

que es singular en los puntos del plano complejo

$$\omega_k = -\frac{b}{a} + \frac{i}{a}\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$



La solución $\tanh(az + b)$ admite dos desarrollos en serie en torno a un punto z_0 del plano complejo:

i) Serie de Laurent

$$\tanh(az + b) = \frac{1}{a(z - z_0)} \left[1 + \frac{a^2}{3}(z - z_0)^2 - \frac{a^4}{45}(z - z_0)^4 + \dots \right]$$

cuando $z_0 = \omega_k$

ii) Serie de Taylor

$$\begin{aligned} \tanh(az + b) &= \tanh(az_0 + b) + \frac{a(z - z_0)}{\cosh^2(az_0 + b)} - \\ &- \frac{a^2 \tanh(az_0 + b)}{\cosh^2(az_0 + b)} (z - z_0)^2 + \\ &+ \frac{a^3 (3 \tanh^2(az_0 + b) - 1)}{3 \cosh^2(az_0 + b)} (z - z_0)^3 + \dots \end{aligned}$$

cuando $z_0 \neq \omega_k$.

Si bien ambos desarrollos corresponden a la misma solución, se hacen en torno a puntos de diferente carácter, ya que unos son puntos singulares de la solución general y otros no.

Una interpretación semejante puede hacerse con los desarrollos de Sine-Gordon que hemos expuesto, pero introduciendo los cambios adecuados al tratarse de una EDP.

2) Modelo ϕ^4

2a) Obtención del término general del desarrollo (1.30)

La ecuación (1.32) sólo puede tener una solución de la forma (1.30) si $\alpha = -1$, es decir

$$u = \phi^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \phi^n. \quad (1.45)$$

Introduciendo este desarrollo en (1.32) se obtiene el término general:

$$a_{r+1,zt} + a_{r+1} + (r+1)(a_{r+2,z} \phi_t + a_{r+2,1} \phi_z + a_{r+2} \phi_{zt}) + \\ + (r+1)(r+2)a_{r+3} \phi_z \phi_t - \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=r+3}}^{\infty} a_i a_j a_k = 0. \quad (1.46)$$

$$r = -3, -2, \dots$$

$$a_r \equiv 0, \quad \text{cuando } r < 0.$$

que permite dado un r , calcular a_{r+3} . Algunos de los términos que se obtienen son:

$$2a_0 \phi_z \phi_t - a_0^3 = 0, \quad r = -3 \quad (1.47a)$$

$$a_{0z} \phi_t + a_{0t} \phi_z + a_0 \phi_{zt} + 3a_0^2 a_1 = 0, \quad r = -2 \quad (1.47b)$$

$$a_{0zt} + a_0 - 3a_0 a_1^2 - 3a_0^2 a_2 = 0, \quad r = -1 \quad (1.47c)$$

De (1.46) también se obtiene que

$$[(r+1)(r+2)\phi_z \phi_t - 3a_0^2] a_{r+3} = f_{r+3}(a_0, \dots, a_{r+2}), \quad (1.48)$$

donde f_{r+3} se puede escribir sin ninguna dificultad.

2b) Soluciones

Como se deduce de (1.47a), se obtienen las soluciones:

i) $a_0 = 0$

En este caso los coeficientes a_1 y a_2 (resonancias) permanecen indeterminados porque (1.48) se escribe como

$$(r+1)(r+2)\phi_z \phi_t a_{r+3} = f_{r+3}(a_1, \dots, a_{r+2}),$$

en donde se puede comprobar que f_1 y f_2 se anulan idénticamente cuando $a_0 = 0$. La solución (1.45) es entonces analítica en ϕ y todos los coeficientes vienen expresados en función de a_1 , a_2 y sus derivadas.

ii) $a_0^2 = 2\phi_x\phi_t$

Ahora (1.48) se escribe como

$$(r-1)(r+4)\phi_x\phi_t a_{r+3} = f_{r+3}(a_0, \dots, a_{r+2}), \quad (1.49)$$

donde las resonancias serían a_4 y a_{-1} (éste coeficiente nulo por definición), pero para $r = 1$, f_4 no se anula idénticamente cuando $a_0^2 = 2\phi_x\phi_t$. Esto se comprueba si se tiene en cuenta que ahora

$$\begin{aligned} a_0^2 &= 2\phi_x\phi_t, \\ a_1 &= -\frac{1}{3a_0^2}(a_{0x}\phi_t + a_{0t}\phi_x + a_0\phi_{xt}), \\ a_2 &= \frac{1}{3a_0^2}(a_{0xt} + a_0 - 3a_0a_1^2), \\ a_3 &= \frac{1}{2a_0^2} \left[a_{1xt} + a_1 + (a_{2x}\phi_t + a_{2t}\phi_x + a_2\phi_{xt}) - \right. \\ &\quad \left. - 6a_0a_1a_2 - a_1^3 \right], \end{aligned}$$

y donde f_4 viene dado por

$$\begin{aligned} f_4(a_0, \dots, a_3) &\equiv a_{2xt} + a_2 + 2(a_{3x}\phi_t + a_{3t}\phi_x + a_3\phi_{xt}) - \\ &\quad - (6a_0a_1a_2 + 3a_0a_2^2 + 3a_1^2a_2). \end{aligned}$$

Esto indica que la solución (1.45) es solo correcta alrededor de aquellos puntos en los que dicha solución no es singular (apartado i). En los puntos en los que la solución es singular u es de la forma

$$u = \frac{1}{\phi} h(\ln \phi) \quad (1.50)$$

donde h una función analítica en su argumento. Esto quiere decir que u tiene una rama logarítmica.

Para que (1.50) sea solución de (1.32), h tiene que ser solución de

$$\phi^2 h_{xt} - \phi(h_x \phi_t + h_t \phi_x) + (2\phi_x \phi_t - \phi_{xt} \phi + \phi^2)h - h^3 = 0 \quad (1.51)$$

e introduciendo en esta ecuación el desarrollo

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (\ln \phi)^n. \quad (1.52)$$

se obtiene el término general

$$\begin{aligned} (r+1)(r+2)\phi_x \phi_t b_{r+3} = & -(r+1) \left[\phi(\phi_x b_{r+1,t} + \phi_t b_{r+1,x}) + \right. \\ & \left. + (-3\phi_x \phi_t + \phi_{xt} \phi) b_{r+1} \right] - \\ & - \phi^2 b_{r,x} + \phi(\phi_x b_{r,t} + \phi_t b_{r,x}) - \\ & - (2\phi_x \phi_t - \phi_{xt} \phi + \phi^2) b_r + \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ i+j+k=r}}^{\infty} b_i b_j b_k, \\ r = & -2, -1, \dots \\ b_r \equiv & 0, \quad \text{cuando } r < 0. \end{aligned} \quad (1.53)$$

En este caso la única solución posible es aquella en la cual b_0 y b_1 permanecen indeterminados y los demás coeficientes son funciones de estos dos y de sus derivadas.

Este resultado prueba que h es analítica en el argumento $\ln \phi$ y que u tiene una singularidad logarítmica trasladable que hace que la ecuación ϕ^4 no sea de tipo Painlevé, y que por lo tanto no sea integrable.

CAPITULO 2

Ecuación de Schrödinger Unidimensional con un potencial de Hylleraas

2.1 Introducción

Cuando un problema no-lineal se trata perturbativamente, se sustituye por infinitos problemas lineales, a menudo más sencillos de resolver.

Como ya veremos en capítulos posteriores, las ecuaciones lineales que aparecerán en nuestro desarrollo perturbativo del modelo ϕ^4 serán ecuaciones de Schrödinger con un potencial de Hylleraas.

En este capítulo se calculan los estados ligados, sus energías y los estados de colisión, para un potencial de Hylleraas generalizado y se hace la aplicación al caso concreto $V(x) = 2 - 3 \cosh^{-2}(x/\sqrt{2})$, que es el que va a aparecer en nuestro trabajo.

2.2 Estados ligados y sus energías correspondientes

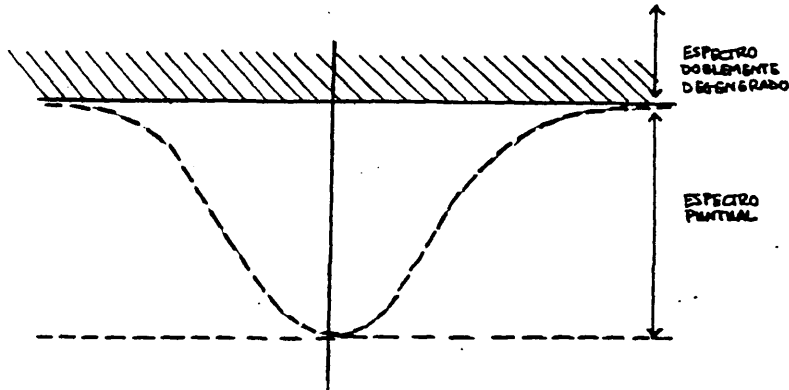
Vamos a resolver la ecuación de Schrödinger

$$-\Psi_{xx} + U(x)\Psi = -\lambda\Psi, \quad (2.1)$$

donde $\Psi = \Psi(x)$ con $x \in (-\infty, +\infty)$ y $U(x)$ es un potencial de Hylleraas de la forma

$$U(x) = U_0 \cosh^{-2} \alpha x,$$

tal que $U_0 < 0$, $\lambda \geq 0$ y α sea un número real.



Hemos puesto $\lambda \geq 0$ para obtener los estados ligados del potencial. Por ser éste de la forma

$$U(x) = \frac{4U_0 e^{-2\alpha x}}{(1 + e^{-2\alpha x})^2},$$

vamos a hacer en (2.1) el cambio de variable [22]

$$y = -e^{-2\alpha x}, \quad (2.2a)$$

$$\Psi(x) = (-y)^\sigma (1-y)^\rho f(y), \quad (2.2b)$$

donde

$$\sigma \equiv \frac{\sqrt{\lambda}}{2\alpha} \geq 0, \quad (2.2c)$$

$$\rho \equiv \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4\mathcal{U}_0}{\alpha^2}} \right] < 0. \quad (2.2d)$$

Con este cambio, $f(y)$ tiene que ser solución de la ecuación

$$y(1-y) \frac{d^2 f}{dy^2} + \left[(1+2\sigma) - (2\sigma+2\rho+1)y \right] \frac{df}{dy} - [2\rho\sigma + \rho^2] f = 0, \quad (2.3)$$

que es una ecuación hipergeométrica.

Una ecuación hipergeométrica tiene la forma general [23]

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + [c - (a+b+1)z] \frac{dw}{dz} - abw = 0, \quad (2.4)$$

donde $w = w(z)$ y a, b, c son constantes. La solución más general de (2.4) en el caso en que $c, c-a-b$ y $a-b$ no sean números enteros y en las proximidades de $z_0 = 0$ es

$$w(z) = C_1 F(a, b; c; z) + C_2 z^{1-c} F(a-c+1, b-c+1; 2-c; z), \quad (2.5)$$

donde C_1 y C_2 son constantes de integración y $F(a, b; c; z)$ es la función hipergeométrica, definida por

$$F(a, b; c; z) = F(b, a; c; z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{n! (c)_n} z^n, \quad (2.6a)$$

donde

$$(a)_n \equiv a(a+1) \dots (a+n-1) = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (2.6b)$$

$$(a)_0 \equiv 1.$$

Aplicando este resultado a (2.3), y deshaciendo los cambios (2.2a) y (2.2b) se llega a que

$$\Psi(x) = e^{-x\sqrt{\lambda}}(1 + e^{-2\alpha x})^\rho \left[C_1 F(a, b; c; -e^{-2\alpha x}) + C_2 (-e^{-2\alpha x})^{1-c} F(a - c + 1, b - c + 1; 2 - c; -e^{-2\alpha x}) \right]. \quad (2.7)$$

donde $a = 2\sigma + \rho$, $b = \rho$ y $c = 1 + 2\sigma$.

Para fijar ideas supondremos en todo lo que sigue que $\alpha > 0$. La condición que debe satisfacer $\Psi(x)$ para que represente un estado ligado es que

$$\Psi(x) \rightarrow 0 \quad \text{cuando} \quad |x| \rightarrow +\infty. \quad (2.8)$$

Con el fin de imponer esta condición vamos a estudiar el comportamiento asintótico de $\Psi(x)$ sólo cuando $x \rightarrow -\infty$, porque al ser $U(x)$ simétrico en el origen ($U(x) = U(-x)$), la función de ondas tiene paridad definida y las condiciones impuestas en $x < 0$ quedan automáticamente impuestas en $x > 0$.

Asintóticamente, $F(a, b; c; z)$ presenta la forma

$$F(a, b; c; z) \underset{|z| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b}, \quad (2.9)$$

por lo que

$$\begin{aligned} \Psi(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} C_1 \left[\frac{\Gamma(1+2\sigma)\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)} (-1)^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}} e^{-|x|\sqrt{\lambda}} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1+2\sigma)\Gamma(2\sigma)}{\Gamma(2\sigma+\rho)\Gamma(1+2\sigma-\rho)} e^{|x|\sqrt{\lambda}} \right] + \\ + (-1)^{1-c} C_2 \left[\frac{\Gamma(1-2\sigma)\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(\rho-2\sigma)\Gamma(1-2\sigma-\rho)} (-1)^{-\frac{\sqrt{\lambda}}{\alpha}} e^{-|x|\sqrt{\lambda}} + \right. \\ \left. + \frac{\Gamma(1-2\sigma)\Gamma(2\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(1-\rho)} e^{|x|\sqrt{\lambda}} \right]. \end{aligned} \quad (2.10)$$

La única forma de que se cumpla (2.8) es procurando que no aparezca en (2.10) ningún término que vaya con $e^{|z|\sqrt{\lambda}}$, que son los que dan contribuciones infinitas en el infinito. Las Gammas de Euler que aparecen como coeficientes de $C_1 e^{|z|\sqrt{\lambda}}$ tienen todos argumentos positivos, a excepción de $2\sigma + \rho$, que podría no serlo.

Escogiendo

$$2\sigma + \rho = -n \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.11)$$

conseguimos que el término $C_1 e^{|z|\sqrt{\lambda}}$ no aparezca en (2.10). Esta ecuación (2.11) es la ecuación de la energía, que determina el valor de λ que tiene que corresponderle a un estado ligado.

Si denotamos con N el número de estados ligados del potencial, la condición $2\sigma \geq 0$ implica que

$$-\rho \geq N$$

que es una cota superior para N . Para que las Gammas que aparecen como coeficientes de $C_2 e^{|z|\sqrt{\lambda}}$ no den contribuciones finitas cuando $2\sigma + \rho = -n$, la constante C_2 ha de tomarse nula ($C_2 = 0$). El término

$$\frac{\Gamma(1 + 2\sigma)\Gamma(-2\sigma)}{\Gamma(\rho)\Gamma(1 - \rho)}$$

es finito cuando $2\sigma + \rho = -n$, ya que es igual a

$$\frac{\Gamma(1 - \rho - n)\Gamma(\rho + n)}{\Gamma(\rho)\Gamma(1 - \rho)} = \frac{(\rho)_n}{(1 - \rho - n)_n} = -1.$$

Además

$$1 - \rho - n \geq 1 + N - n > 0.$$

Así pues, la solución de (2.1) correspondiente a un estado ligado viene dada por

$$\Psi = \Psi_n(x) = C e^{\alpha \rho x} e^{\alpha n x} (1 + e^{-2\alpha x})^\rho \times \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{\rho(\rho+1)\dots(\rho+k-1)}{(\rho+n-1)(\rho+n-2)\dots(\rho+n-k)} (-e^{-2\alpha x})^k. \quad (2.12)$$

En esta expresión C es una constante de normalización ya que (2.1) es lineal. Por otra parte, de (2.12) se puede deducir fácilmente que $\Psi_n(x)$ es par cuando $n = 0$ ó par y es impar cuando n es impar, tal y como debe ocurrir por la simetría $U(x) = U(-x)$. Para $\lambda = 0$, (2.12) no es la solución más general de la ecuación (2.1) pero con razonamientos análogos es fácil ver que no hay estados ligados a energía cero.

2.3 Estados de Colisión

Los estados de colisión de la ecuación (2.1) aparecen cuando $\lambda < 0$. Concretamente, si $\lambda = -k^2$ con k un número real, entonces $\sigma = \sqrt{\lambda}/2\alpha$ es

$$\sigma_{\pm} = \pm \frac{ik}{2\alpha}. \quad (2.13)$$

En este caso (2.1) tiene dos soluciones linealmente independientes y con la misma energía, que con ayuda de (2.7) se pueden escribir como

$$\Psi_-^{(k)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma_2} e^{ikx} (1 + e^{-2\alpha x})^\rho F(a_-, b; c_-; -e^{-2\alpha x}), \quad (2.14)$$

$$\Psi_+^{(k)}(x) \equiv \frac{1}{\Gamma_3 e^{\frac{x}{2\alpha}}} e^{ikx} (1 + e^{2\alpha x})^\rho (-e^{2\alpha x})^{1-c_+} \times F(a_+ - c_+ + 1, b - c_+ + 1; 2 - c_+; -e^{2\alpha x}), \quad (2.15)$$

donde $a_{\pm}, c_{\pm}, \Gamma_2, \Gamma_3$ están definidos por

$$a_{\pm} \equiv 2\sigma_{\pm} + \rho, \quad (2.16a)$$

$$c_{\pm} \equiv 1 + 2\sigma_{\pm}, \quad (2.16b)$$

$$\Gamma_2 \equiv \frac{\Gamma(c_-)\Gamma(a_- - b)}{\Gamma(a_-)\Gamma(c_- - b)}, \quad (2.16c)$$

$$\Gamma_3 \equiv \frac{\Gamma(2 - c_+)\Gamma(b - a_+)}{\Gamma(b - c_+ + 1)\Gamma(1 - a_+)}. \quad (2.16d)$$

(Nótese que a_+ y c_+ son como a_- y c_- pero cambiando $k \rightarrow -k$).

Las expresiones (2.14) y (2.15) se pueden escribir de una forma más manejable utilizando (2.6a), (2.16a) y (2.16b) como

$$\Psi_-^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma_2} e^{ikx} e^{-\alpha \rho x} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho - \frac{ik}{\alpha})_n (\rho)_n}{n! (1 - \frac{ik}{\alpha})_n} (-e^{-2\alpha x})^n, \quad (2.17)$$

$$\Psi_+^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma_2} e^{-ikx} e^{\alpha \rho x} (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho - \frac{ik}{\alpha})_n (\rho)_n}{n! (1 - \frac{ik}{\alpha})_n} (e^{-2\alpha x})^n. \quad (2.18)$$

Debido a la invariancia de (2.1) con el cambio $x \rightarrow -x$,

$$\Psi_-^{(k)}(x) = \Psi_+^{(k)}(-x),$$

por lo que la solución más general a esta ecuación con estados de colisión, **salvo normalización**, viene dada por

$$\Psi_+^{(k)}(x) \pm \Psi_-^{(k)}(x), \quad (2.19)$$

donde la combinación $+(-)$ es **par(impar)** en x .

2.4 Aplicación al caso $V(x) = 2 - 3 \cosh^{-2}(x/\sqrt{2})$

Vamos a resolver ahora la ecuación

$$-\Psi_{xx} + [2 - 3 \cosh^{-2}(x/\sqrt{2})]\Psi = \omega^2 \Psi. \quad (2.20)$$

En este caso $U_0 = -3$, $-\lambda = \omega^2 - 2$, $\rho = -2$. La condición (2.11) indica que sólo hay dos estados ligados. Estos estados, deducidos de (2.11) y (2.12) con sus energías correspondientes son:

$$\omega_0 = 0, \quad \Psi_0(x) \equiv \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^{1/2} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad \text{par} \quad (2.21)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \Psi_1(x) \equiv \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2} \frac{\tanh(\frac{x}{\sqrt{2}})}{\cosh(\frac{x}{\sqrt{2}})} \quad \text{impar}, \quad (2.22)$$

que satisfacen las relaciones de ortonormalidad

$$\langle \Psi_n | \Psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}, \quad n, n' = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.23)$$

siendo $\langle f | g \rangle$ el producto escalar definido como

$$\langle f | g \rangle \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx f^*(x)g(x)$$

con $f = f(x)$, $g = g(x)$.

En cuanto a los estados de colisión, si $\lambda = -k^2$, entonces

$$\omega^2 = 2 + k^2, \quad (2.24)$$

e introduciendo en (2.19) las expresiones (2.17) y (2.18) y operando, se llega a

$$\begin{aligned} \Psi_{\substack{(k) \\ par \\ impar}} = A(k) \left\{ e^{ikx} \left[3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2) \right] \pm \right. \\ \left. \pm e^{-ikx} \left[3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.25)$$

donde $A(k)$ es un factor de normalización. Este factor se puede obtener de la condición

$$\langle \Psi_{\substack{(k) \\ impar}} | \Psi_{\substack{(k') \\ impar}} \rangle = \frac{1}{2} [\delta(k - k') \pm \delta(k + k')]. \quad (2.26)$$

Usando el resultado (A.4) del Apéndice A puede verse que

$$A(k) = \left[\frac{1}{16\pi(k^2 + 2)(2k^2 + 1)} \right]^{1/2}. \quad (2.27)$$

Las relaciones de ortonormalidad entre los estados ligados y de colisión son

$$\langle \Psi_n | \Psi_\lambda^{(k)} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_n^*(x) \Psi_\lambda^{(k)}(x) = 0 \quad \forall k, \quad (2.28)$$

donde $n = 0, 1$ y $\lambda = par, impar$, como se muestra con los resultados (A.5) del Apéndice A. De (2.21), (2.22), (2.25) y (2.28) se obtiene la *relación de cierre*

$$\begin{aligned} \Psi_0^*(x) \Psi_0(x') + \Psi_1^*(x) \Psi_1(x') + \\ + \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\Psi_{par}^{(k)*}(x) \Psi_{par}^{(k)}(x') + \Psi_{impar}^{(k)*}(x) \Psi_{impar}^{(k)}(x') \right] = \delta(x - x'), \end{aligned} \quad (2.29)$$

derivada en el Apéndice A, expresiones (A.6), (A.7) y (A.12). Esta relación a menudo la emplearemos en la forma más esquemática y funcional

$$|\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| + |\Psi_1\rangle\langle\Psi_1| + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k, \lambda\rangle\langle k, \lambda| = I, \quad (2.30)$$

donde $|k, 1\rangle \equiv \Psi_{par}^{(k)}(x)$, $|k, 2\rangle \equiv \Psi_{impar}^{(k)}(x)$.

CAPITULO 3

El efecto de pequeñas perturbaciones sobre el comportamiento de los kinks

3.1 Introducción

El efecto de las perturbaciones sobre los kinks puede interpretarse en primer orden como una modulación temporal de los parámetros característicos del kink. En este capítulo se calculan explícitamente las ecuaciones diferenciales para estos parámetros mediante leyes de conservación. Estas ecuaciones son la de la velocidad y la del centro de energías ("centro " de ahora en adelante) de la onda solitaria y constituyen la dinámica del kink perturbado. Son FDO deducidas de EDP.

El método empleado en su deducción utilizando leyes de conservación no es el más adecuado, aunque proporciona bastante información. Consecuencias y ejemplos referentes a esto también se muestran en este capítulo.

En la última parte se calculan las ecuaciones dinámicas en primer orden para kinks de SG perturbados.

3.2 Efecto de pequeñas perturbaciones sobre la dinámica de los kinks del modelo ϕ^4

En este capítulo nos vamos a dedicar al estudio de la ecuación del modelo ϕ^4 perturbado

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = \epsilon R[u], \quad (3.1)$$

donde ϵ es un número real tal que $0 < \epsilon \ll 1$. El término $R[u]$ puede representar fuerzas externas, impurezas, efectos de disipación, inhomogeneidades espaciales, etc.

Más concretamente lo que vamos a estudiar es el efecto que tienen estas perturbaciones sobre la solución

$$u_0(x - vt) = \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0), \quad (3.2)$$

correspondiente al kink de la ecuación sin perturbar

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0, \quad (3.3)$$

ambas ya expuestas en el Capítulo 1.

Es bien conocido en la literatura que los efectos de una perturbación sobre un kink o solitón, por pequeña que sea, producen [25], [26] :

- Un cambio en los parámetros del solitón que pasan a ser funciones del tiempo.
En nuestro caso los parámetros son v y x_0 .
- Un cambio en la forma del solitón.
- La formación de un grupo de ondas de pequeña amplitud que normalmente se conoce con el nombre de radiación.

Estos efectos se pueden ver de la siguiente manera: Si nos situamos en el sistema de referencia en el que el kink u_0 está en reposo

$$u_0 = \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \quad (3.4)$$

y nos preguntamos cuándo será solución

$$u = u_0 + \psi,$$

con $|\psi| \ll u_0$ y $\psi = \psi(x, t)$ de la ecuación (3.3), al menos en primer orden de perturbaciones, la respuesta que obtendremos es que cuando ψ sea solución de la ecuación lineal

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + (3u_0^2 - 1)\psi = 0. \quad (3.5)$$

Utilizando para resolver esta ecuación el método de separación de variables y escribiendo

$$\psi(x, t) = (Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t})h(x) \quad (3.6)$$

con A y B constantes, $h(x)$ tiene que ser solución de

$$-h''(x) + V(x)h(x) = \omega^2 h(x) \quad (3.7)$$

donde

$$V(x) \equiv \left(2 - 3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

La ecuación (3.7) es la ecuación de Schrödinger con un potencial de Hylleraas, cuya resolución exacta puede verse en el Capítulo 2. Esta ecuación tiene dos estados ligados para los cuales $\omega_0 = 0$ y $\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$, siendo sus funciones de onda

$$|0\rangle = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^{1/2} \cosh^{-2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad \text{par} \quad (3.8a)$$

$$|1\rangle = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2} \frac{\tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\cosh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}, \quad \text{impar} \quad (3.8b)$$

respectivamente, y estados de colisión doblemente degenerados tales que

$$\omega(k) = \sqrt{2 + k^2}, \quad k \in (-\infty, +\infty)$$

y función de ondas

$$|k, \lambda\rangle = A(k) \left[e^{ikx} \left\{ 3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2) \right\} \pm \text{c.c.} \right] \quad (3.9)$$

donde $\lambda = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$, c.c. es el complejo conjugado y

$$A(k) \equiv \left[\frac{1}{16\pi(k^2 + 1)(2k^2 + 1)} \right]^{1/2}.$$

$|k, 1\rangle$ es par y $|k, 2\rangle$ impar cuando se cambia $x \rightarrow -x$.

Las ecuaciones (3.8a), (3.8b) y (3.9) satisfacen la *relación de cierre*

$$1 = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k, \lambda\rangle\langle k, \lambda|. \quad (3.10)$$

Esta relación permite escribir la solución general de la ecuación (3.5) como

$$\psi(x, t) = C_0(t)|0\rangle + C_1(t)|1\rangle + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk C_\lambda(k, t)|k, \lambda\rangle, \quad (3.11)$$

donde

$$C_0(t) = A_0 + B_0 t, \quad (3.12a)$$

$$C_1(t) = A_1 e^{i\omega t} + B_1 e^{-i\omega t} \quad (3.12b)$$

y

$$C_\lambda(k, t) \pm C_\lambda(-k, t) = A_\lambda(k) e^{i\omega(k)t} + B_\lambda(k) e^{-i\omega(k)t}. \quad (3.12c)$$

Como puede verse en (3.12a), el modo $|0\rangle$ corresponde a una *traslación* y el $|1\rangle$ a una *oscilación interna* del kink.

Si en lugar de buscar soluciones de la ecuación (3.3), las buscáramos de (3.1), $\psi(x, t)$ tendría que ser solución de

$$\psi_{tt} - \psi_{xx} + (3u_0^2 - 1)\psi = \epsilon R[u_0], \quad (3.13)$$

y las funciones $C_0(t)$, $C_1(t)$ y $C_\lambda(k, t)$ vendrían determinadas en este caso por las ecuaciones diferenciales ordinarias

$$C_0''(t) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{8}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}}}, \quad (3.14a)$$

$$C_1''(t) + \frac{3}{2}C_1 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\tanh \frac{x}{\sqrt{2}}}{\cosh \frac{x}{\sqrt{2}}} R[u_0], \quad (3.14b)$$

$$\begin{aligned} C_\lambda''(k, t) + C_\lambda''(-k, t) + (2 + k^2)[C_\lambda(k, t) \pm C_\lambda(-k, t)] = \\ = 2A(k) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left\{ e^{ikx} \left[3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2) \right] \pm c.c. \right\} R[u_0]. \end{aligned} \quad (3.14c)$$

En la descomposición

$$\psi(x, t) = \cdots |0\rangle + \cdots |1\rangle + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots |k, \lambda\rangle$$

se muestra el efecto de las perturbaciones antes mencionado: el modo $|0\rangle$ no cambia la forma, pero altera los parámetros del kink, mientras que los modos $|1\rangle$ y $|k, \lambda\rangle$ son responsables de los cambios de forma y de la aparición de radiación.

3.3 Aproximación Adiabática y obtención de las ecuaciones de los parámetros del kink en primera aproximación

Debido a que los efectos de las perturbaciones sobre los kinks son generalmente difíciles de tratar se suele emplear en su estudio lo que se conoce como *aproximación adiabática*. Esta aproximación sólo tiene en cuenta, de todas las modificaciones que antes hemos mencionado, la primera; es decir, supone que la forma del solitón permanece intacta y que no aparece radiación, pero que los parámetros del kink se convierten en funciones del tiempo.

Veamos ahora cómo se determina esta dependencia para el modelo ϕ^4 utilizando leyes de conservación.

Admitiendo la aproximación adiabática, escribiremos una solución de (3.1) como

$$u \simeq \tanh \phi, \quad (3.15)$$

donde ϕ no está conocido del "todo", aunque supondremos que es de la forma

$$\phi = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - z(t)) \quad (3.16)$$

y tal que

$$z'(t) = v(t) + \theta_0'(t), \quad ' \equiv \frac{d}{dt} \quad (3.17)$$

además de exigir las condiciones

$$\phi_x = \frac{\gamma}{\sqrt{2}}, \quad (3.18a)$$

$$\phi_t = -\frac{\gamma}{\sqrt{2}}v, \quad (3.18b)$$

que coincidirían con las del caso en que $\epsilon = 0$. En el Capítulo 1 se definió la densidad conservada

$$T_1 \equiv \frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2,$$

para la cual ahora se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2 \right]_{,t} = \\ &= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_t R[u], \end{aligned}$$

que se deduce teniendo en cuenta la ecuación (3.1). Esta igualdad indica que cuando una ecuación se perturba sus densidades conservadas pueden dejar de serlo. Por otra parte, de (1.12) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4\gamma}{3\sqrt{2}} \right) = \\ &= \frac{4}{3\sqrt{2}} \gamma^3 v v', \end{aligned}$$

e igualando los segundos miembros de estas dos ecuaciones se llega a

$$\gamma^2 v'(t) = -\epsilon \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh^2 \phi}. \quad (3.19)$$

Haciendo lo mismo con T_2 en lugar de T_1 ,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_2 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx (u_x u_t)_{,t} = \\ &= - \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_x R[u], \\ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_2 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4\gamma v}{3\sqrt{2}} \right), \end{aligned}$$

se obtiene

$$\gamma^2 v'(t) = -\epsilon \frac{3}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh^2 \phi}$$

que coincide con el resultado anterior.

Ya tenemos la ecuación diferencial que satisface $v(t)$, vamos a ver ahora la de $\theta_0(t)$. Para ello se repite el mismo procedimiento pero utilizando la densidad xT_1 , asociada al centro de energías, en lugar de T_1 . En este caso

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2 \right]_{,t} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx X_1 + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx x u_t R[u], \\ \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_1 &= \frac{d}{dt} \left(\frac{4\gamma z}{3\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación diferencial para el centro del kink

$$z'(t) = v - \epsilon \frac{3\sqrt{2}}{4} v (1 - v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh^2 \phi} \quad (3.20)$$

y por lo tanto

$$\gamma \theta'_0(t) = -\epsilon \frac{3\sqrt{2}}{4} v \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh^2 \phi} \quad (3.21)$$

Las ecuaciones (3.19) y (3.21) describen la *dinámica del kink en la aproximación adiabática*.

Nótese que cuando $\epsilon \neq 0$, la variable z que aparece en (3.17) sustituye a $(vt + x_0)$ en $\epsilon = 0$. Algunas particularizaciones interesantes son:

i) $R[u] \equiv -a - bu$, a, b constantes

$$v' = \epsilon \frac{3\sqrt{2}a}{2\gamma^3}, \quad (3.22a)$$

$$\theta'_0 = \epsilon \frac{3bv}{2\gamma^2}. \quad (3.22b)$$

ii) $R[u] \equiv -\alpha u_t$, $\alpha > 0$ constante

que representa un término disipativo.

$$v' = -\epsilon \frac{\alpha v}{\gamma^2}, \quad (3.23a)$$

$$\theta'_0 = 0. \quad (3.23b)$$

La ecuación (3.23a) se resuelve mucho más fácilmente si se escribe en la variable $\Gamma \equiv \gamma v$, es decir, proporcional al momento (1.13), ya que entonces

$$\Gamma' + \epsilon \alpha \Gamma = 0$$

cuya solución es

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-\epsilon \alpha t} \quad (3.24)$$

que indica un decrecimiento exponencial en esta variable.

iii) $R[u]$ impar en u

$$v' = 0 \Rightarrow v = \text{constante}$$

o lo que es equivalente, que T_1 sigue siendo una densidad conservada.

iv) $R[u]$ par en u

$$\theta'_0 = 0 \Rightarrow \theta_0 = \text{constante}$$

que indica que el centro z del kink se mueve con velocidad v .

3.4 Problemas que surgen con el empleo de leyes de conservación

Veamos ahora qué habríamos obtenido si en la deducción de (3.20) hubiéramos empleado T_2 en lugar de T_1 .

Repitiendo los cálculos anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, T_2 &= - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x (u_t u_x)_{,t} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, X_2 - \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, u_x R[u], \end{aligned}$$

y por otra parte

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, x \, T_2 = \frac{d}{dt} \left(\frac{4\gamma v \, z}{3\sqrt{2}} \right),$$

igualando los segundos miembros resulta:

$$z'(t) = v - \epsilon \frac{3\sqrt{2}}{4 \, v} (1 - v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \, \frac{\phi R[u_0]}{\cosh^2 \phi} \quad (3.25)$$

que no coincide con (3.20).

Como ya veremos este problema no es exclusivo del modelo ϕ^4 , sino que también aparece en SG.

El origen de esta discordancia está en el hecho de haber empleado leyes de conservación para deducir las ecuaciones adiabáticas, pues no se puede estar seguro de si usando otras leyes de conservación se puede llegar o no a contradicciones .

Otro ejemplo de esta situación es el caso de la ecuación KdV con un término disipativo [27]:

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = -\Gamma(t)q.$$

La solución de la ecuación sin perturbar es

$$q(x, t) = 2\eta^2 \cosh^{-2} \eta(x - x_0)$$

donde

$$x_{0t} = 4\eta^2.$$

KdV tiene infinitas densidades conservadas, pero solamente nos fijaremos en

$$\begin{aligned} T_1 &\equiv q \\ T_2 &\equiv q^2. \end{aligned}$$

Utilizando IST o un método perturbativo no es difícil escribir la ecuación diferencial para la amplitud η ,

$$\eta_t = -\frac{2}{3}\Gamma\eta. \quad (3.26)$$

Mediante las cantidades conservadas antes citadas, y en el orden dominante se obtiene que :

a)

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx q = -\Gamma(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dx q,$$

de donde se deduce

$$\eta_t = -\Gamma\eta, \quad (3.27)$$

b)

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx q^2 = -2\Gamma(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dx q^2,$$

y por lo tanto

$$\eta_t = -\frac{2}{3}\Gamma\eta,$$

c)

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x q = 3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx q^2 - \Gamma(t) \int_{-\infty}^{+\infty} dx x q,$$

que da como resultado

$$\eta_t = -\Gamma\eta.$$

Evidentemente estos resultados no coinciden. La ecuación diferencial correcta es (3.26), pues ha sido calculada por dos métodos diferentes, y sin embargo con ciertas cantidades conservadas se obtiene una ecuación diferente. Esto indica que hay que ser sumamente cuidadoso en la deducción de estas ecuaciones y

que el mejor procedimiento es combinar un método perturbativo o IST (en el caso de una ecuación integrable) con la información suministrada por las cantidades conservadas.

3.5 Ecuación de Sine-Gordon

La ecuación perturbada se escribe en este caso

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = \epsilon R[u], \quad (3.28)$$

y la solución sobre la que se trata de ver el efecto de la perturbación [28] viene dada por el kink (1.21)

$$u_0 = 4 \arctan \exp \gamma(x - vt - x_0). \quad (3.29)$$

Admitiendo la aproximación adiabática como en el modelo ϕ^4 , la solución de (3.28) la escribiremos como

$$u \simeq 4 \arctan \exp \phi \quad (3.30)$$

donde

$$\phi = \gamma(x - z(t)), \quad (3.31)$$

y $z(t)$ satisface la ecuación (3.17).

De la densidad conservada T_1 dada por (2.19a) se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + (1 - \cos u) \right]_{,t} = \\ &= \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_t R[u], \end{aligned}$$

y además

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1 = \frac{d}{dt}(8\gamma),$$

igualando los segundos miembros se deduce:

$$\gamma^2 v'_{SG}(t) = -\frac{\epsilon}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh \phi}, \quad (3.32)$$

que es la ecuación para la velocidad. Repitiendo los cálculos con T_2 se obtiene el mismo resultado.

En cuanto a la ecuación del centro del kink, con

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_1 &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx x \left[\frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + (1 - \cos u) \right]_{,t} = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx X_1 + \epsilon \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_t R[u] \end{aligned}$$

y

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_1 = \frac{d}{dt} (8\gamma z)$$

se obtiene que

$$z'_{SG}(t) = v - \frac{\epsilon}{4} v(1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh \phi} \quad (3.33)$$

y por lo tanto

$$\gamma \theta'_{SG} = -\frac{\epsilon}{4} v \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh \phi}. \quad (3.34)$$

Con estas expresiones puede verse qué parecidas son las formas de las ecuaciones (3.19), (3.21) y (3.32), (3.34).

Si hubiéramos empleado

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_2$$

en este último caso, la ecuación que habríamos obtenido para $z(t)$ sería

$$z'_{SG}(t) = v - \frac{\epsilon}{4v} (1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh \phi}$$

que como ya habíamos mencionado no coincide con (3.33).

Es importante mencionar ahora las ventajas que tiene que una ecuación sin perturbación sea resoluble por IST. Por ejemplo en este caso, modificando adecuadamente los parámetros de scattering se puede llegar a una ecuación para la velocidad válida hasta términos de orden $O(\epsilon^2)$ [29] y cuya expresión es

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} = & -\frac{\epsilon}{4}(1-v^2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0] + R^{(1)}}{\cosh \phi} - \\ & -\frac{\epsilon\nu}{4\pi i}(1-v^2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{r^{(1)}(\lambda)}{(\lambda + i\nu)^2} e^{ik(\lambda)z}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} u &= u_0 + u^{(1)} + u^{(2)} + \dots, \\ R^{(1)} &\equiv R[u_0 + u^{(1)}] - R[u_0], \\ u^{(1)}(x, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{r^{(1)}(\lambda)(\lambda^2 - \nu^2 + 2i\lambda\nu \tanh \phi)}{\lambda(\lambda + i\nu)^2} e^{ik(\lambda)z}, \\ \nu &= \frac{1}{2} \sqrt{(1+v)(1-v)}, \end{aligned}$$

y $r^{(1)}$ una cierta función. Lo mismo puede hacerse para el centro de energías, y en ese caso:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} = & v - \frac{\epsilon}{4} v(1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi \left(\frac{R[u_0] + R^{(1)}}{\cosh \phi} \right) - \\ & -\frac{\epsilon\nu}{4\pi i} v(1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \phi \frac{R[u_0]}{\cosh^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{r^{(1)}(\lambda)}{(\lambda + i\nu)^2} e^{ik(\lambda)z} - \\ & -\frac{\epsilon\nu}{4\pi i} v(1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx R[u_0] \times \\ & \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \frac{r^{(1)}[(\lambda^2 - \nu^2) \tanh \phi + 2i\lambda\nu]}{(\lambda + i\nu)^2(\lambda^2 + \nu^2)} e^{ik(\lambda)z}. \end{aligned}$$

Con este procedimiento también pueden determinarse las correcciones $u^{(1)}, u^{(2)}, \dots$ originadas por la perturbación.

CAPITULO 4

Correcciones analíticas a la solución no perturbada en primer y segundo orden

4.1 Introducción

Como ϕ^4 es un sistema no-integrable no se puede resolver mediante IST. Si lo hubiera sido, permitiendo variaciones de primer orden en aquellos parámetros del método de scattering que son constantes en el tiempo, se habrían obtenido las ecuaciones del capítulo anterior y también, con modificaciones similares, las correcciones a la onda inicial. En nuestro caso estas correcciones tienen que calcularse por otros procedimientos.

En este capítulo introducimos una solución casi estacionaria dependiente de dos tipos de variables, unas rápidas y otras lentas, y calculamos la primera y segunda corrección para dos casos de perturbaciones $F = -bq$ y $F = -\alpha q_t$.

Estas correcciones se calculan con vistas a la introducción de perturbaciones estocásticas en capítulos posteriores.

4.2 Descripción del método perturbativo

En el capítulo anterior hemos deducido las ecuaciones dinámicas de un kink de ϕ^4 perturbado mediante leyes de conservación, pero también hemos mencionado que ése no era el mejor método para su obtención, aunque indudablemente aportara información. Vamos a desarrollar en este capítulo un método perturbativo que proporciona las correcciones analíticas a la onda no perturbada.

Las ideas básicas de este método se pueden explicar de la siguiente forma [8]: estudiamos la solución de la ecuación de ondas

$$q_{tt} - q_{xx} - q + q^3 = \epsilon F(q, q_x, \dots) \quad 0 < \epsilon \ll 1, \quad (4.1)$$

donde F puede ser no-lineal en sus argumentos. La ecuación sin perturbar ($\epsilon = 0$) tiene como solución (1.10),

$$q_0(x, t) = \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0).$$

Esta solución la vamos a escribir en términos de ciertas variables *rápidas y lentas* como

$$q_0(x, t) = Q_0(\theta, T) = \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(\theta - \theta_0), \quad (4.2)$$

donde θ es una variable rápida, $T \equiv et$ es una variable lenta y $\gamma = \gamma(T)$, $\theta_0 = \theta_0(T)$ son parámetros que dependen de la variable lenta. Esta distinción de escalas permite a las variables cambiar a diferente ritmo en el transcurso del tiempo.

Vamos a generalizar θ de manera que satisfaga

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 1, \quad (4.3a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -v, \quad (4.3b)$$

donde $v = v(T)$. Con esto, llamaremos a (4.2) *solución casi-estacionaria* y escribiremos la solución de (4.1) como

$$q = Q(\theta, T, \epsilon). \quad (4.4)$$

Posteriormente tendremos que desarrollar ecuaciones para los parámetros $v(T)$ y $\theta_0(T)$, usando determinadas condiciones, de manera que nos permitan escribir para Q una extensión de la forma

$$Q = Q_0 + \epsilon Q_1 + \epsilon^2 Q_2 + \dots, \quad (4.5)$$

donde Q_1 satisface ciertas propiedades, por ejemplo Q_1 acotada cuando $|\theta| \rightarrow \infty$.

El método puede extenderse para Q_N , y lo que se obtiene es:

- Una región donde dicha serie es válida, aunque la convergencia para $|\theta| < \infty$ no sea uniforme.
- Una solución casi-estacionaria que depende sólo de θ y T .

4.3 Aplicación al caso $F = -bq$ con b constante

En este caso la ecuación que queremos resolver es

$$q_{tt} - q_{xx} - q + q^3 = -\epsilon bq, \quad (4.6)$$

donde b es una constante. Si admitimos una solución casi-estacionaria de la forma (4.4), teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned} \partial_t &= -v\partial_\theta + \epsilon\partial_T, \\ \partial_x &= \partial_\theta, \end{aligned}$$

$Q(\theta, T, \epsilon)$ tiene que ser solución de

$$(v^2 - 1)Q_{\theta\theta} - Q + Q^3 = \epsilon(v_T Q_\theta + 2vQ_{\theta T} - bQ) + \epsilon^2(-Q_{TT}). \quad (4.7)$$

Escribiendo Q como la serie (4.5), donde Q_0 viene dado por (4.2), y ordenando los términos en potencias de ϵ , se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$O(\epsilon^0) \quad (v^2 - 1)Q_{0\theta\theta} - Q_0 + Q_0^3 = 0, \quad (4.8)$$

$$O(\epsilon) \quad (v^2 - 1)Q_{1\theta\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_1 = v_T Q_{0\theta} + 2vQ_{0\theta T} - bQ_0, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} O(\epsilon^2) \quad (v^2 - 1)Q_{2\theta\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_2 &= -3Q_0 Q_1^2 + v_T Q_{1\theta} + \\ &+ 2vQ_{1\theta T} - bQ_1 - Q_{0TT}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

donde Q_0 satisface idénticamente (4.8).

Vamos a determinar ahora Q_1 . De (4.9) tenemos que Q_1 es solución de la ecuación

$$LQ_1 = F_1, \quad (4.11)$$

donde L es el operador autoadjunto ($L = L^\dagger$)

$$L \equiv (v^2 - 1)\partial_\theta^2 + (3Q_0^2 - 1), \quad (4.12)$$

y F_1 la función

$$F_1 \equiv v_T Q_{0\theta} + 2v Q_{0\theta T} - b Q_0. \quad (4.13)$$

Con el cambio de variable $x = \gamma(\theta - \theta_0)$, (4.12) se transforma en el operador

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + \left(2 - 3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \quad (4.14)$$

cuyos valores y funciones propias han sido calculadas explícitamente en el Capítulo 2, y que tiene asociado la relación de cierre

$$I = |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1| + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k, \lambda\rangle\langle k, \lambda|,$$

donde $|0\rangle$, $|1\rangle$ y $|k, \lambda\rangle$ vienen dados por (2.21), (2.22) y (2.25) respectivamente.

La función $Q_{0\theta}$ dada por

$$Q_{0\theta} = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad x \equiv \gamma(\theta - \theta_0)$$

subyace en el espacio vectorial engendrado por $|0\rangle$, pues $L|0\rangle = 0$ y $Q_{0\theta}$ es solución de

$$LQ_{0\theta} = 0,$$

como se demuestra derivando (4.8) respecto a θ

$$(v^2 - 1)\partial_{\theta\theta} Q_{0\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_{0\theta} = 0,$$

concretamente

$$|Q_{00}\rangle = \left(\frac{4}{3\sqrt{2}}\right)^{1/2} \gamma|0\rangle.$$

En cuanto a Q_1 , puede escribirse como

$$|Q_1\rangle = |0\rangle\langle 0|Q_1\rangle + |1\rangle\langle 1|Q_1\rangle + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk |k, \lambda\rangle\langle k, \lambda|Q_1\rangle$$

utilizando la relación de cierre, por lo que

$$L|Q_1\rangle = \sqrt{\frac{3}{2}}|1\rangle\langle 1|Q_1\rangle + \sum_{\lambda=1,2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \sqrt{2+k^2} |k, \lambda\rangle\langle k, \lambda|Q_1\rangle,$$

ya que

$$\begin{aligned} L|0\rangle &= 0, \\ L|1\rangle &= \sqrt{\frac{3}{2}}|1\rangle, \\ L|k, \lambda\rangle &= \sqrt{2+k^2}|k, \lambda\rangle, \end{aligned}$$

cumpléndose entonces que

$$\langle 0|LQ_1\rangle = 0,$$

es decir, LQ_1 subyace en el espacio vectorial ortogonal a $|0\rangle$. La condición anterior sólo puede ser cierta si se cumple la condición de compatibilidad

$$\langle 0|F_1\rangle = 0. \quad (4.15)$$

Esta condición elimina términos seculares que pudieran aparecer como correcciones a Q_0 de la forma

$$\epsilon x \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$$

que son importantes cuando $x \sim O(\frac{1}{\epsilon})$.

Nótese que una condición de este tipo no es nueva en la literatura [30], pues por ejemplo, en la resolución del problema de valores iniciales para $u = u(t)$:

$$\begin{aligned} u'' + u + \epsilon u^3 &= 0, & 0 < \epsilon \ll 1 \\ u(0) &= 1 \\ u'(0) &= 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

se sabe que la función $E(u)$ definida por

$$E(u) = u'^2 + u^2 + \epsilon \frac{u^4}{2}$$

es constante, y que por lo tanto u tiene que estar acotada. Si se prueba en (4.16) una solución de la forma

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + \epsilon^2 u_2 + \dots,$$

con

$$u_0 = \cos t$$

la solución del problema no-perturbado, la ecuación que se obtiene para u_1 es

$$\begin{aligned} u_1'' + u_1 + \cos^3 t &= 0 \\ u_1(0) = u_1'(0) &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es

$$u_1(t) = -\frac{1}{32} \cos t + \frac{1}{32} \cos 3t - \frac{3}{8} t \sin t$$

donde aparece el término secular $-\frac{3}{8} t \sin t$ que da contribuciones no acotadas cuando $t \sim O(\frac{1}{\epsilon})$, que como ya hemos dicho no pueden ser admitidas.

Expresando el problema en una nueva variable s , dada por

$$t = s(1 + \epsilon c_1 + \epsilon^2 c_2 + \dots) \tag{4.17}$$

donde c_i , $i = 1, 2, \dots$ son constantes, (4.16) es equivalente a

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + u + \epsilon[2c_1 u + u^3] + \epsilon^2[(2c_2 + c_1^2)u + 2c_1 u^3] + \dots = 0$$

y escribiendo u como

$$u = \cos s + \epsilon u_1(s) + \epsilon^2 u_2(s) + \dots,$$

la ecuación para $u_1(s)$ es ahora

$$u_1''(s) + u_1 + (2c_1 u_0 + u_0^3) = 0$$

donde

$$\begin{aligned} 2c_1 u_0 + u_0^3 &= 2c_1 \cos s + \cos^3 s \\ &\equiv \frac{1}{4} \cos 3s + \left(2c_1 + \frac{3}{4}\right) \cos s. \end{aligned}$$

Eligiendo $2c_1 + \frac{3}{4} = 0$, desaparece el término que origina términos seculares en u_1 , por lo que

$$u_1 = -\frac{1}{32} \cos s + \frac{1}{32} \cos 3s,$$

teniéndose entonces la solución de (4.16) escrita como

$$u = \cos s + \epsilon \left(-\frac{1}{32} \cos s + \frac{1}{32} \cos 3s \right) + O(\epsilon^2),$$

$$s = t \left(1 + \epsilon \frac{3}{8} + O(\epsilon^2) \right),$$

pudiéndose continuar el proceso para calcular las correcciones a órdenes superiores.

La condición (4.15) tiene la misma finalidad que $2c_1 + \frac{3}{4} = 0$, pero con más complicaciones por no tratarse de EDO.

Teniendo en cuenta que F_1 viene dada por (4.13) y Q_0 por (4.2), se puede escribir como

$$F_1(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left[v_T \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4v(\gamma^2 v v_T \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \theta_{0,T}) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} + \right. \\ \left. + 2\gamma^2 v^2 v_T \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right] - b \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (4.18)$$

por lo que la condición de compatibilidad (4.15) es equivalente a

$$v_T = 0, \quad (4.19)$$

indicando que no hay cambio en la velocidad de la onda con este tipo de perturbación. Introduciendo (4.19) en (4.18),

$$F_1(x) = 2\gamma^2 v \theta_{0,T} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - b \tanh \frac{x}{\sqrt{2}},$$

siendo la ecuación que hay que resolver para obtener Q_1 , la ecuación de Schrödinger no-homogénea

$$-\frac{d^2 Q_1}{dx^2} + \left(2 - 3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) Q_1 = 2\gamma^2 v \theta_{0,T} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - b \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (4.20)$$

Impondremos como condición a la solución Q_1 de esta ecuación que esté acotada cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Una de las soluciones de la ecuación homogénea, la que está acotada en el infinito, ya se obtuvo en el Capítulo 2, pues es en realidad $|0\rangle$. En cuanto a la otra, puede obtenerse con el cambio

$$y = -e^{-\sqrt{2}x} \\ \Psi(x) = -\frac{y}{(1-y)^2} f(y),$$

en

$$-\Psi_{xx} + \left(2 - 3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) \Psi = 0, \quad (4.21)$$

lo que da para $f(y)$ la ecuación

$$y(1-y)f'' + (3+y)f' = 0,$$

que es un caso particular de la ecuación hipergeométrica (2.4), cuya solución viene dada por (2.5), es decir

$$f(y) = a + b \left(-\frac{1}{2y^2} + \frac{4}{y} + 6 \ln |y| - 4y + \frac{y^2}{2} \right),$$

donde a y b son constantes de integración. Desahaciendo estos últimos cambios, la solución general de (4.21) puede escribirse como

$$\Psi(x) = Ag_1(x) + Bg_2(x), \quad A, B \text{ constantes} \quad (4.22)$$

donde

$$g_1(x) \equiv \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (4.23a)$$

$$g_2(x) \equiv 3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + 3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (4.23b)$$

ésta última no acotada cuando $|x| \rightarrow \infty$.

Apliquemos ahora el método de variación de constantes para resolver (4.20).

Puede hacerse de dos formas, o escribiendo

$$Q_1 = C(x) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

con lo cual

$$-Q_1'' + \left(2 - 3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}\right) Q_1 = F_1$$

se escribiría como

$$-C'' \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} C' \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} = F_1,$$

ecuación que sirve para determinar $C(x)$, o bien poniendo

$$Q_1 = A(x)g_1(x) + B(x)g_2(x),$$

donde g_1 y g_2 vienen dadas por (4.23) y tal que

$$A'g_1 + B'g_2 = 0,$$

$$A'g'_1 + B'g'_2 = F_1.$$

En general es preferible el primer método porque evita en muchas ocasiones, aunque no siempre, la contribución no acotada de $g_2(x)$, así como integrales más complicadas. Esto puede verse con el siguiente ejemplo: si F_1 estuviera dada por

$$F_1 = -3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

entonces la sustitución

$$Q_1 = C(x) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

daría el resultado

$$Q_1 = -\tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

que está acotada cuando $|x| \rightarrow \infty$, y sin embargo

$$Q_1 = A(x)g_1 + B(x)g_2$$

nos llevaría a

$$Q_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

que no está acotada en el infinito. Ahora bien,

$$\frac{3}{8} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{4} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}$$

es solución de la ecuación homogénea, luego Q_1 podría escribirse sólo con

$$Q_1 = -\tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

que coincidiría con la del caso anterior

Una vez mencionado esto, la solución más general de (4.20) puede escribirse como

$$Q_1 = C_1 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{b}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) \quad (4.24)$$

donde C_1 es una constante de integración. Esta es la única constante de integración que aparece ya que no hemos introducido $g_2(x)$. La expresión (4.24) no es válida para todo x , sino únicamente para

$$\epsilon x \ll 1,$$

es decir

$$|x| \ll O(\epsilon^{-1}). \quad (4.25)$$

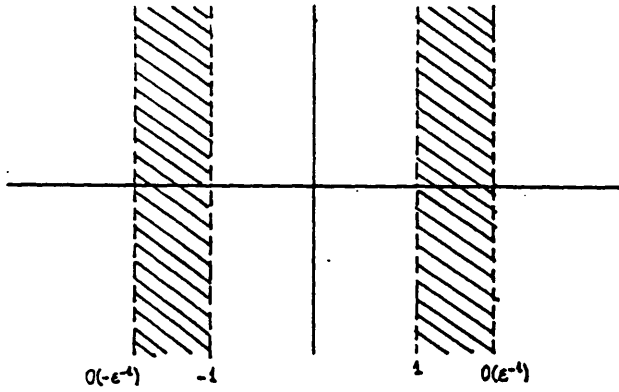
En cuanto al valor asintótico de Q_1 , se tiene

$$Q_1 \sim -\frac{b}{2} \quad \text{cuando } x \rightarrow \infty \quad (4.26a)$$

y

$$Q_1 \sim \frac{b}{2} \quad \text{cuando } x \rightarrow -\infty, \quad (4.26b)$$

donde $x \rightarrow \infty$ se lee como $1 \ll x \ll O(\epsilon^{-1})$.



Según el signo de b , la corrección asintótica de Q_1 a Q_0 es positiva ($b < 0$) o negativa ($b > 0$) cuando $x \rightarrow \infty$. C_1 puede fijarse imponiendo a Q_1 condiciones iniciales específicas u otras condiciones. En el caso $C_1 = 0$, Q_1 es una función impar en x .

Vamos a obtener ahora la segunda corrección Q_2 .

De la ecuación (4.10) se tiene que

$$LQ_2 = F_2, \quad (4.27)$$

donde F_2 viene dado por

$$F_2 \equiv -3Q_0Q_1^2 + v_TQ_{1\theta} + 2vQ_{1\theta T} - bQ_1 - Q_{0TT}. \quad (4.28)$$

Esta expresión desarrollada puede verse en el Apéndice B. En este caso la condición

de compatibilidad es

$$\langle 0|F_2\rangle = 0, \quad (4.29)$$

que teniendo en cuenta las expresiones para Q_0 , Q_1 y la condición $v_T = 0$, se puede expresar como (Apéndice B)

$$\theta_{0,T} = 0 \Rightarrow \quad \theta_{0,T} = \text{constante}. \quad (4.30)$$

Es importante decir que la constante C_1 no aparece nunca en ninguna condición de compatibilidad. Esto es general a todos los casos, sea cual sea la perturbación considerada.

Procediendo de manera similar a la forma de calcular Q_1 , la solución Q_2 de (4.27) puede escribirse como

$$\begin{aligned} Q_2 = & C_2 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \\ & + C_1^2 \left(-\tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C_1 \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(-2 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + C_1 b \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \gamma^4 v^2 \theta_{0,T}^2 \left(-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \frac{\gamma^4}{2} \theta_{0,T}^2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + b^2 \left(-\frac{1}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{8} \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \gamma^2 v \theta_{0,T} b \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right), \end{aligned} \quad (4.31)$$

siendo C_2 una constante de integración. Igual que antes, este desarrollo es válido en el rango

$$\epsilon^2 x^2 \ll 1,$$

es decir

$$|x| \ll O(\epsilon^{-1}).$$

Asintóticamente

$$\begin{aligned} Q_2 &\underset{z \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{b^2}{8} \\ Q_2 &\underset{z \rightarrow -\infty}{\sim} \frac{b^2}{8}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

y cuando $C_1 = C_2 = 0$, Q_2 es una función impar.

A la vista de todo esto se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Mediante este método perturbativo se pueden calcular las correcciones Q_1 , Q_2, \dots que aparecen en la aproximación casi-estacionaria para EDP no integrables. Para aquellas que son integrables estas correcciones también pueden obtenerse con IST.
- La *dinámica del kink* viene dada por las condiciones de compatibilidad para eliminar términos seculares. En el caso que hemos resuelto son

$$\begin{aligned} v_T &= 0, \\ \theta_{0,T} &= \text{constante}, \end{aligned}$$

que concuerdan con (3.22).

- No todo se puede calcular, ya que $\theta_{0,T}$ queda indeterminado y este método no lo proporciona. La razón es que algunos términos de Q_1 pueden ser absorbidos en el orden dominante de Q_0 cambiando los otros parámetros. Sin embargo, considerando leyes de conservación puede obtenerse que

$$\theta_{0,T} = \frac{3bv}{2\gamma^2}, \quad (4.33)$$

como dedujimos en (3.22b).

- Se podría haber puesto $b = b(t)$.
- En el caso $|x| \gg O(\epsilon^{-1})$ es necesario resolver una ecuación lineal, lo que normalmente lleva asociado la aparición de una cola, que es la radiación [31],[32].

Con la expresión $\theta_{0,T} = \frac{3bv}{2\gamma^2}$, Q_1 y Q_2 dadas por (4.24) y (4.31) y para el caso $C_1 = C_2 = 0$, se escribirían como

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\frac{b}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \frac{3}{2} bv^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}, \\ Q_2 &= -\frac{b^2}{8} \left(2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ &\quad + \frac{3b^2v^2}{8} \left(4 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \\ &\quad - \frac{9b^2v^4}{4} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right). \end{aligned}$$

Si la onda se mueve con velocidades no-relativistas ($v \ll 1$), bv^2 y b^2v^2 , b^2v^4 son correcciones a b y b^2 .

Queda por último aclarar lo siguiente: puede pensarse que la ecuación (4.6) no es muy relevante, pues puede escribirse como

$$q_{tt} - q_{xx} - (1 - \epsilon b)q + q^3 = 0 \quad (4.34)$$

cuya solución exacta es

$$q(x, t) = \sqrt{1 - \epsilon b} \tanh \left[\frac{\gamma}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \epsilon b} (x - vt - x_0) \right] \quad (4.35)$$

con v constante; sin embargo, sirve para poner de manifiesto cómo se emplea el método perturbativo en casos más complejos y comparar sus resultados con los de la solución exacta.

4.4 Aplicación al caso disipativo $F = -\alpha q_t$

Vamos a estudiar ahora la ecuación

$$q_{tt} - q_{xx} - q + q^3 = -\epsilon \alpha q_t, \quad \alpha > 0 \quad (4.36)$$

donde $F = -\alpha q_t$ representa un término disipativo.

Suponiendo una solución casi-estacionaria para esta ecuación de la forma (4.4), (4.36) se escribiría como

$$(v^2 - 1)Q_{\theta\theta\theta} - Q + Q^3 = \epsilon((v_{,T} + \alpha v)Q_{\theta} + 2vQ_{\theta T}) + \epsilon^2(-\alpha Q_T - Q_{TT}). \quad (4.37)$$

Admitiendo un desarrollo de la forma (4.5) y ordenando en potencias de ϵ se obtienen las ecuaciones

$$O(\epsilon^0) \quad (v^2 - 1)Q_{0\theta\theta} - Q_0 + Q_0^3 = 0$$

que lógicamente es (4.8),

$$O(\epsilon) \quad (v^2 - 1)Q_{1\theta\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_1 = (v_{,T} + \alpha v)Q_{0\theta} + 2vQ_{0\theta T}, \quad (4.38)$$

$$O(\epsilon^2) \quad (v^2 - 1)Q_{2\theta\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_2 = -3Q_0Q_1^2 + (v_{,T} + \alpha v)Q_{1\theta} + \\ + 2vQ_{1\theta T} - \alpha Q_{0T} - Q_{0TT}, \quad (4.39)$$

$$O(\epsilon^3) \quad (v^2 - 1)Q_{3\theta\theta} + (3Q_0^2 - 1)Q_3 = -Q_1^3 - 6Q_0Q_1Q_2 + \\ + (v_{,T} + \alpha v)Q_{2\theta} + 2vQ_{2\theta T} - \\ - \alpha Q_{1T} - Q_{1TT}. \quad (4.40)$$

La primera corrección Q_1 es solución de

$$LQ_1 = F_1,$$

donde L está dado por (4.12) y F_1 por

$$F_1 = (v_{,T} + \alpha v)Q_{0\theta} + 2vQ_{0\theta t}, \quad (4.41)$$

es decir

$$F_1 = \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \left[(v_{,T} + \alpha v) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4v(\gamma^2 v v_{,T} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \theta_{0,T}) \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2\gamma^2 v^2 v_{,T} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right], \quad (4.42)$$

donde se ha sustituido $Q_0(\theta, T)$ por (4.2). En este caso la condición de compatibilidad (4.15) es equivalente a

$$\gamma^2 v_{,T} + \alpha v = 0, \quad (4.43)$$

que coincide con (3.23a) y que como ya dijimos se escribe más fácilmente en la variable $\Gamma \equiv \gamma v$, cuya solución es

$$\Gamma(t) = \Gamma(0)e^{-\alpha T}. \quad (4.44)$$

Introduciendo (4.43) en (4.42) y resolviendo la ecuación de Schrödinger no-homogénea correspondiente, se obtiene que Q_1 viene dada por

$$Q_1 = C_1 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + C_2 \left(3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + 3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \frac{\alpha \gamma v^3}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (4.45)$$

donde es necesario escoger $C_2 = 0$ con el fin de que Q_1 esté acotada cuando $|x| \rightarrow \infty$. A la vista de (4.45), el desarrollo

$$Q = Q_0 + \epsilon Q_1 + \epsilon^2 Q_2 + \dots$$

es válido para

$$|x| \ll O(\epsilon^{-1/2}), \quad (4.46)$$

porque

$$\epsilon Q_1 \sim \epsilon x^2 \ll 1.$$

La región (4.46) es menor que en el caso $F = -bq$ tratada anteriormente. El valor asintótico de Q_1 , deducido de (4.45), viene dado por

$$Q_1 \underset{|x| \rightarrow \infty}{\sim} \frac{4}{\sqrt{2}} \alpha \gamma v^3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 e^{-\sqrt{2}|x|} \quad (4.47)$$

e independiente de C_1 . En este caso $|x| \rightarrow \infty$ ha de entenderse como $1 \ll |x| \ll O(\epsilon^{-1/2})$.

En lo que se refiere a la segunda corrección Q_2 , tiene que ser solución de $LQ_2 = F_2$ con F_2 dada por

$$F_2 = -3Q_0 Q_1^2 + (v_{,T} + \alpha v) Q_{1\theta} + 2v Q_{1\theta T} - \alpha Q_{0T} - Q_{0TT}, \quad (4.48)$$

donde es necesario introducir Q_0 y Q_1 para hallar su expresión. Como ésta es demasiado larga y no la escribiremos aquí, sin embargo la condición de compatibilidad $\langle 0|F_2\rangle = 0$ puede comprobarse, tras largos cálculos, que es equivalente a

$$\theta_{0,TT} + \alpha \theta_{0,T}(1 - 3v^2) = 0, \quad (4.49)$$

donde no aparece C_1 , como ya se ha dicho anteriormente.

En el Apéndice B puede verse la forma final de F_2 dada por (4.48).

Resolviendo la ecuación de Schrödinger correspondiente, se obtiene para Q_2 la expresión:

$$\begin{aligned}
 Q_2 = & C_2 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - C_1^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \\
 & - C_1 \frac{\alpha \gamma v^3}{\sqrt{2}} \left(2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \\
 & - C_1 \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \\
 & - \alpha^2 \gamma^2 v^2 \left(\int dx \cosh^4 \frac{x}{\sqrt{2}} \int^x ds \frac{s}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \\
 & + \alpha^2 \gamma^2 v^4 \left(\frac{4}{3} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^3 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \\
 & - \frac{\alpha^2 \gamma^2 v^6}{2} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^4 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\
 & + \alpha \gamma^3 v^2 \theta_{0,T} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) - \\
 & - \alpha \gamma^3 v^4 \theta_{0,T} \left(\sqrt{2} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\
 & + \frac{\gamma^4 \theta_{0,T}^2}{2} \left(\left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\
 & + \gamma^4 \theta_{0,T}^2 v^2 \left[- \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right],
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

donde C_2 es nuevamente una constante de integración. Aunque no hemos podido calcular analíticamente la integral cuyo coeficiente es $\alpha^2 \gamma^2 v^2$, el término

$$\left(\int dx \cosh^4 \frac{x}{\sqrt{2}} \int^x ds \frac{s}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{s}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}$$

está acotado en el infinito, como se puede ver en el Apéndice B. De (4.50) y (B.4.1)-(B.4.2) puede deducirse el comportamiento asintótico de Q_2 ,

$$Q_2 \sim \begin{cases} \alpha^2 \gamma^2 v^2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 e^{-2x}, & x \rightarrow \infty \\ -\alpha^2 \gamma^2 v^2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 e^{2x}, & x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

Igual que en el caso anterior $\theta_{0,T}$ queda sin determinar con este formalismo pero utilizando el procedimiento expuesto en el Capítulo 3 relacionado con leyes de conservación, se obtiene que $\theta_{0,T} = 0$, como indica (3.23b). Con este resultado (4.49) se satisface idénticamente y las ecuaciones dinámicas de la onda vienen dadas por lo tanto, por

$$\gamma^2 v_T + \alpha v = 0, \quad (4.51a)$$

$$\theta_{0,T} = 0, \quad (4.51b)$$

resultado que ya conocíamos.

CAPITULO 5

Perturbaciones estocásticas localizadas en el espacio y dependientes del tiempo

5.1 Introducción

En este capítulo se introducen perturbaciones localizadas en el espacio y estocásticas en el tiempo sobre los kinks de ϕ^4 , considerándose dos tipos: aditivas y multiplicativas, con o sin disipación. Para un kink inicialmente en reposo o moviéndose con velocidades no relativistas, se calculan explícitamente los valores medios de los parámetros que caracterizan su dinámica, comprobándose que mientras en la perturbación aditiva el movimiento inducido es no-newtoniano, lo es en la multiplicativa.

También se calculan en este capítulo las ecuaciones de Fokker-Planck para cada perturbación y cualquier velocidad inicial de la onda en cuestión, así como las ecuaciones de variación con el tiempo de los valores medios de tales parámetros. Al final se aplican las mismas ideas a la ecuación de SG, comprobándose que las ecuaciones del caso aditivo son las mismas que para ϕ^4 salvo un factor numérico, pero que las del caso multiplicativo difieren sustancialmente, debido a la forma que tiene el kink de SG sin perturbar.

5.2 Ecuaciones de Langevin de la dinámica de los kinks del modelo ϕ^4

En los dos capítulos anteriores hemos estudiado el efecto que tienen las perturbaciones analíticas sobre los solitones. Estudiemos ahora

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = \epsilon R[u] \quad (5.1)$$

cuando en $R[u]$ aparecen términos aleatorios o estocásticos. De todos los posibles casos que se pueden tratar nos vamos a limitar a dos:

i) Ruido aditivo con disipación

$$R[u] = -F(t) - \alpha u_t, \quad (5.2)$$

donde $F(t)$ varía estocásticamente con el tiempo y está localizada en $[-L, +L]$.

α es una constante positiva. En este caso $F(t)$ representa una fuerza externa.

ii) Ruido multiplicativo con disipación

$$R[u] = -V(t)u - \alpha u_t, \quad (5.3)$$

donde $V(t)$ satisface las mismas propiedades que $F(t)$.

Evidentemente no son éstas las perturbaciones más generales en las que se puede pensar, pero son apropiadas para mostrar los efectos que este tipo de términos inducen sobre las ondas.

Comencemos estudiando el caso aditivo: sustituyendo (5.2) en las ecuaciones que describen la dinámica de los kinks de ϕ^4 perturbados (3.19) y (3.20) se obtiene

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{3\sqrt{2}}{4} (1 - v^2)^{3/2} \Omega_1(\gamma, z) F(t) - \alpha v (1 - v^2) \right], \quad (5.4a)$$

$$z'(t) = v + \epsilon \frac{3}{2} v (1 - v^2) \Gamma_1(\gamma, z) F(t), \quad (5.4b)$$

donde

$$\Omega_1(\gamma, z) \equiv \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z) + \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z), \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_1(\gamma, z) \equiv & \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z) \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z) - \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z) \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z) + \\ & + \ln \cosh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z) - \ln \cosh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z), \end{aligned} \quad (5.5b)$$

donde puede verse que sólo la ecuación de la velocidad (5.4) se ve afectada explícitamente por la disipación. Cuando $L \rightarrow +\infty$, o análogamente, cuando la extensión del kink es muy pequeña comparada con la región del ruido $\Omega_1(\gamma, z) = 2$ y $\Gamma_1(\gamma, z) = 0$ y por lo tanto

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - v^2)^{3/2} F(t) - \alpha v(1 - v^2) \right], \quad (5.6)$$

$$z'(t) = v. \quad (5.7)$$

Para el ruido multiplicativo con disipación, las ecuaciones (3.19) y (3.20) se escriben como

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{3\sqrt{2}}{4}(1 - v^2)^{3/2} \Omega_2(\gamma, z) V(t) - \alpha v(1 - v^2) \right], \quad (5.8a)$$

$$z'(t) = v + \epsilon \frac{3}{2} v(1 - v^2) \Gamma_2(\gamma, z) V(t), \quad (5.8b)$$

con Ω_2 y Γ_2 dados por

$$\Omega_2(\gamma, z) \equiv \frac{1}{2} \left[\tanh^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z) - \tanh^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z) \right], \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_2(\gamma, z) \equiv & \frac{1}{2} \left[\tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z) + \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z) - \right. \\ & \left. - \frac{\gamma(L + z)}{\sqrt{2} \cosh^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L + z)} - \frac{\gamma(L - z)}{\sqrt{2} \cosh^2 \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(L - z)} \right], \end{aligned} \quad (5.9b)$$

en donde lo mismo que antes sólo la ecuación de la velocidad queda afectada explícitamente por la disipación. Si $L \rightarrow +\infty$, $\Omega_2(\gamma, z) = 0$, $\Gamma_2(\gamma, z) = 1$ y

$$v'(t) = -\epsilon\alpha v(1 - v^2), \quad (5.10)$$

$$z'(t) = v + \epsilon\frac{3}{2}v(1 - v^2)V(t), \quad (5.11)$$

donde (5.10) es una EDO pues no contiene términos estocásticos.

Las ecuaciones (5.6), (5.7), (5.10) y (5.11) son las ecuaciones de Langevin [34], [35], [36] de la dinámica del kink.

Supongamos ahora que estamos interesados en el cálculo de los valores medios $\langle v(t) \rangle$, $\langle z(t) \rangle$, $\langle v^2(t) \rangle$ y $\langle z^2(t) \rangle$ que caracterizan la onda perturbada. Estos valores pueden ser obtenidos de dos formas:

- a) Resolviendo las ecuaciones de Langevin correspondientes y tomando valores medios.

Para llevar esto a cabo es necesario especificar que clase de ruido es $F(t)$, por lo que supondremos que $F(t)$ es un ruido Gaussiano estacionario tal que

$$\begin{aligned} \langle F(t_1)F(t_2) \cdots F(t_{2n+1}) \rangle &= 0 \\ \langle F(t_1)F(t_2) \cdots F(t_{2n}) \rangle &= (2D)^n \sum_p \underbrace{\delta(t_1 - t_2)\delta(t_3 - t_4) \cdots \delta(\dots)}_n, \end{aligned} \quad (5.12)$$

donde D es una constante y p son las formas de colocar $(2n)$ bolas distintas en n cajas de forma que haya dos bolas en cada caja,

$$p = \frac{(2n)!}{2^n n!} = 1 \cdot 3 \cdots (2n - 1).$$

Las mismas condiciones se imponen para $V(t)$.

- b) Resolviendo la ecuación de Fokker-Planck asociada a las ecuaciones de Langevin y llevando a cabo las correspondientes integrales.

La aplicación del primer método es muy difícil en el caso de las ecuaciones no-lineales (5.6), (5.7) ó (5.10), (5.11), pero si el kink está inicialmente en reposo es posible considerar el límite no-relativista $v \ll 1$.

Veamos esto para el ruido aditivo: cuando $v \ll 1$, (5.6) y (5.7) se escriben como

$$v' + \alpha v = \frac{3\sqrt{2}}{2} F(t), \quad (5.13a)$$

$$z' = v, \quad (5.13b)$$

donde se han despreciado términos de orden $O(v^2)$ en la ecuación de la velocidad. La ecuación (5.13a) también aparece en el movimiento Browniano de una partícula pequeña. La solución de estas ecuaciones, suponiendo que $F(t)$ es una "función del tiempo" con las condiciones iniciales $v_0 = v(0)$, $z_0 = z(0)$, son:

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} + \frac{3\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha t} \int_0^t ds e^{\alpha s} F(s), \quad (5.14a)$$

$$z(t) = z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{3\sqrt{2}}{2\alpha} \int_0^t ds F(s) - \frac{3\sqrt{2}}{2\alpha} e^{-\alpha t} \int_0^t ds e^{\alpha s} F(s) \quad (5.14b)$$

Teniendo en cuenta

$$\langle F(t) \rangle = 0,$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2D\delta(t - t'),$$

se tiene que

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.15a)$$

$$\langle z(t) \rangle = z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (5.15b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\alpha t} + \frac{9D}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (5.15c)$$

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = & z_0^2 + \frac{2}{\alpha} z_0 v_0 (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{v_0^2}{\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha t})^2 + \\ & + \frac{9D}{2\alpha^2} \left[2t + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) (-3 + e^{-\alpha t}) \right], \end{aligned} \quad (5.15d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = z_0 v_0 e^{-\alpha t} + \frac{v_0^2}{\alpha} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{9D}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2, \quad (5.15e)$$

como se deduce en el Apéndice C.

Antes nos hemos referido al movimiento Browniano de una partícula pequeña; concretamente, para el caso de una partícula puntual de masa la misma que la del kink $M = \frac{4}{3\sqrt{2}}$ dada en (1.16), la ecuación análoga a (5.13a) es

$$v' + \alpha v = \frac{3\sqrt{2}}{4} F_{punt}(t),$$

y se puede obtener de la anterior con el cambio

$$F(t) \equiv F_{ext} \rightarrow \frac{F_{punt}}{2}.$$

Con este cambio,

$$D \equiv D_{ext} \rightarrow \frac{D_{punt}}{4},$$

que indica que la estructura extensa del kink rebaja el coeficiente de difusión, o lo que es lo mismo, muestra los efectos de considerar entes puntuales o extensos.

Para el ruido multiplicativo, en el caso no-relativista (5.10) y (5.11) se escriben

$$v' + \alpha v = 0, \quad (5.16a)$$

$$z' = v + \frac{3}{2} v V(t), \quad (5.16b)$$

donde se han despreciado términos de orden $O(v^3)$, y sus soluciones son

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.17a)$$

$$z(t) = z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{3}{2} v_0 \int_0^t ds e^{-\alpha s} V(s). \quad (5.17b)$$

Como $\langle V(t) \rangle = 0$, $\langle V(t)V(t') \rangle = 2D\delta(t - t')$, se tienen los valores medios

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.18a)$$

$$\langle z(t) \rangle = z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (5.18b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\alpha t}, \quad (5.18c)$$

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = & z_0^2 + \frac{2}{\alpha} z_0 v_0 (1 - e^{-2\alpha t}) + \frac{v_0^2}{\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha t})^2 + \\ & + \frac{9D}{4\alpha^2} v_0^2 (1 - e^{-2\alpha t}), \end{aligned} \quad (5.18d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = z_0 v_0 e^{-\alpha t} + \frac{v_0^2}{\alpha} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (5.18e)$$

Para determinar valores medios superiores , como por ejemplo $\langle v^3 \rangle$, hay que utilizar correlaciones superiores de F y V . Lo mismo sucede cuando se resuelven ecuaciones de Langevin no-lineales.

5.3 Ecuación de Fokker-Planck

Anteriormente nos referimos a un método alternativo relacionado con la ecuación de Fokker-Planck. La ecuación de Fokker-Planck (FP) es una ecuación de movimiento determinista para la distribución de probabilidad de variables macroscópicas que fluctúan [37], [38], [39].

La ecuación de Fokker-Planck equivalente al sistema (5.6)-(5.7) tiene la forma

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\alpha v (1 - v^2) + \frac{27}{2} D v (1 - v^2)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{9}{2} D (1 - v^2)^3 \right] W, \quad (5.19)$$

donde $W = W(z, v, t)$ es la función de distribución de probabilidad. En el límite $v \ll 1$ y para el sistema (5.13a)-(5.13b) esta ecuación se puede escribir como

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} \alpha v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{9}{2} D \right] W. \quad (5.20)$$

Veamos cómo se obtiene estas ecuaciones.

Sea el sistema de ecuaciones de Langevin

$$x'_i = h_i + g_{ij} \Gamma_j(t), \quad (5.21)$$

con $i, j = 1, \dots, N$, donde $h_i = h_i(x)$ y $g_{ij} = g_{ij}(x)$ y donde $\Gamma_i(t)$ es una variable estocástica con las propiedades

$$\begin{aligned} \langle \Gamma_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle &= 2D \delta_{ij} \delta(t - t'). \end{aligned}$$

La ecuación de FP asociada al sistema (5.21) es [39]

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} D_i + \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij} \right] W \quad (5.22)$$

donde $W = W(x_i, t)$ y los coeficientes deterministas D_i y de difusión D_{ij} vienen dados por

$$D_i \equiv h_i + Dg_{kj} \frac{\partial}{\partial x_k} g_{ij}, \quad (5.23a)$$

$$D_{ij} \equiv Dg_{ik}g_{jk}, \quad i, j, k = 1, \dots, N \quad (5.23b)$$

respectivamente.

Para el sistema (5.6)-(5.7) se tiene que

$$\begin{aligned} h_z &= v, \\ h_v &= -\alpha v(1 - v^2), \\ g_{zz} &= g_{zv} = g_{vv} = 0, \\ g_{vz} &= \frac{3\sqrt{2}}{2}(1 - v^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} D_z &\equiv h_z = v, \\ D_v &\equiv h_v + Dg_{vz} \frac{\partial}{\partial v} g_{vz} \\ &= -\alpha v(1 - v^2) - \frac{27}{2} Dv(1 - v^2)^2, \\ D_{vv} &\equiv Dg_{vz}^2 = \frac{9}{2} D(1 - v^2)^3, \\ D_{zz} &= D_{zv} = D_{vz} = 0, \end{aligned}$$

que introducidos en (5.22) dan como resultado (5.19). En cuanto al sistema (5.13a)-(5.13b),

$$\begin{aligned} h_z &= v, \\ h_v &= -\alpha v, \\ g_{zz} &= g_{zv} = g_{vv} = 0, \\ g_{vz} &= \frac{3\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

de donde resultan los coeficientes

$$\begin{aligned} D_z &= v, \\ D_v &= -\alpha v, \\ D_{zz} &= D_{zv} = D_{vz} = 0, \\ D_{vv} &= \frac{9}{2} D, \end{aligned}$$

con lo que la ecuación de FP final es (5.20).

Estos son los resultados correspondientes al ruido aditivo con disipación. En cuanto al ruido multiplicativo, para el sistema (5.10)-(5.11), se tiene

$$\begin{aligned} h_z &= v, \\ h_v &= -\alpha v(1 - v^2), \\ g_{zz} &= \frac{3}{2} v(1 - v^2), \\ g_{zv} &= g_{vz} = g_{vv} = 0, \end{aligned}$$

y por lo tanto, de las definiciones (5.23) se obtiene que

$$\begin{aligned} D_z &\equiv h_z = v, \\ D_v &\equiv h_v = -\alpha v(1 - v^2), \\ D_{zz} &= Dg_{zz} = \frac{9}{4} Dv^2(1 - v^2)^2, \\ D_{zv} &= D_{vz} = D_{vv} = 0, \end{aligned}$$

lo que nos permite escribir

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} (\alpha v(1 - v^2)) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{9}{4} Dv^2(1 - v^2)^2 \right] W. \quad (5.24)$$

Para el caso no-relativista representado por (5.16), tendríamos

$$\begin{aligned}h_z &= v, \\h_v &= -\alpha v, \\g_{zz} &= \frac{3}{2}v, \\g_{zv} &= g_{vx} = g_{vv} = 0,\end{aligned}$$

que junto a

$$\begin{aligned}D_z &= v, \\D_v &= -\alpha v, \\D_{zz} &= \frac{9}{4}Dv^2, \\D_{zv} &= D_{vx} = D_{vv} = 0,\end{aligned}$$

nos proporcionan la ecuación de FP que buscábamos

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z}v + \frac{\partial}{\partial v}\alpha v + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{9}{4}Dv^2 \right] W. \quad (5.25)$$

Veamos ahora cómo es posible obtener los valores medios a partir de estas ecuaciones. Igual que antes sólo nos vamos a ocupar de $\langle v(t) \rangle$, $\langle z(t) \rangle$, $\langle v^2(t) \rangle$ y $\langle z^2(t) \rangle$ y como siempre distinguiremos los casos

i) Ruido aditivo

El valor medio $\langle v(t) \rangle$ se obtiene mediante la integral

$$\langle v(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-1}^1 dv v W(z, v, t), \quad (5.26)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle v(t) \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-1}^1 dv v \frac{\partial W(z, v, t)}{\partial t} = \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-1}^1 dv v \left[-\frac{\partial}{\partial z}v + \frac{\partial}{\partial v}(\alpha v(1-v^2) + \right. \\&\quad \left. + \frac{27}{2}Dv(1-v^2)^2) + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\frac{9}{2}D(1-v^2)^3 \right] W\end{aligned}$$

donde se ha empleado la ecuación (5.19). Teniendo en cuenta las identidades

$$\begin{aligned} v \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial z}(v \cdot), \\ v \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial v}(v \cdot) - (\cdot), \\ v \frac{\partial^2}{\partial v^2}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial v} \left(v \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \right) - \frac{\partial}{\partial v}(\cdot), \end{aligned}$$

y suponiendo que W tiende a cero con suficiente rapidez en el infinito, se llega a que

$$\frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = -\alpha \langle v(1-v^2) \rangle - \frac{27}{2} D \langle v(1-v^2)^2 \rangle, \quad (5.27)$$

que es la ecuación de la variación temporal de $\langle v(t) \rangle$. En cuanto a $\langle v^2(t) \rangle$,

$$\langle v^2(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-1}^1 dv v^2 W(z, v, t),$$

que junto a (5.19) y a las identidades

$$\begin{aligned} v^2 \frac{\partial}{\partial z}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial z}(v^2 \cdot), \\ v^2 \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial v}(v^2 \cdot) - 2v(\cdot), \\ v^2 \frac{\partial^2}{\partial v^2}(\cdot) &\equiv \frac{\partial}{\partial v} \left(v^2 \frac{\partial}{\partial v}(\cdot) \right) - 2 \frac{\partial}{\partial v}(v \cdot) + 2(\cdot), \end{aligned}$$

nos conducen a

$$\frac{d}{dt} \langle v^2(t) \rangle = -2\alpha \langle v^2(1-v^2) \rangle + 9D \langle (1-4v^2)(1-v^2)^2 \rangle, \quad (5.28)$$

De igual forma se calculan $\langle z(t) \rangle$, $\langle z^2(t) \rangle$ y $\langle z(t)v(t) \rangle$. El resultado es

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \rangle = \langle v \rangle, \quad (5.29)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z^2(t) \rangle = 2 \langle zv \rangle, \quad (5.30)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)v(t) \rangle = \langle v^2 \rangle - \alpha \langle zv(1-v^2) \rangle - \frac{27}{2} D \langle zv(1-v^2)^2 \rangle. \quad (5.31)$$

Para el caso no-relativista, con la correspondiente ecuación de FP

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} \alpha v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{g}{2} D \right] W,$$

se obtiene que

$$\frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = -\alpha \langle v \rangle, \quad (5.32a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \rangle = \langle v \rangle, \quad (5.32b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle v^2(t) \rangle = -2\alpha \langle v^2 \rangle + 9D, \quad (5.32c)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z^2(t) \rangle = 2\langle zv \rangle, \quad (5.32d)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)v(t) \rangle = \langle v^2 \rangle - \alpha \langle zv \rangle. \quad (5.32e)$$

ii) Ruido multiplicativo

Procediendo de manera análoga, de la ecuación de FP (5.24) se obtienen las siguientes ecuaciones para los valores medios:

$$\frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = -\alpha \langle v(1 - v^2) \rangle, \quad (5.33a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \rangle = \langle v \rangle, \quad (5.33b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle v^2(t) \rangle = -2\alpha \langle v^2(1 - v^2) \rangle, \quad (5.33c)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z^2(t) \rangle = 2\langle zv \rangle + \frac{9}{2} D \langle v^2(1 - v^2)^2 \rangle, \quad (5.33d)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)v(t) \rangle = \langle v^2 \rangle - \alpha \langle zv(1 - v^2) \rangle, \quad (5.33e)$$

y para el kink no-relativista con

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} \alpha v + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{g}{4} D v^2 \right] W$$

el resultado es

$$\frac{d}{dt}\langle v(t) \rangle = -\alpha\langle v \rangle, \quad (5.34a)$$

$$\frac{d}{dt}\langle z(t) \rangle = \langle v \rangle, \quad (5.34b)$$

$$\frac{d}{dt}\langle v^2(t) \rangle = -2\alpha\langle v^2 \rangle, \quad (5.34c)$$

$$\frac{d}{dt}\langle z^2(t) \rangle = 2\langle zv \rangle + \frac{9}{2}D\langle v^2 \rangle, \quad (5.34d)$$

$$\frac{d}{dt}\langle z(t)v(t) \rangle = \langle v^2 \rangle - \alpha\langle zv \rangle. \quad (5.34e)$$

Nótese que para obtener las ecuaciones de estos valores medios no ha sido necesario conocer W .

5.4 Resolución de las ecuaciones de los valores medios para kinks no-relativistas

Las soluciones para los valores medios en el caso de kinks no-relativistas son (5.32a)-(5.32e) para el ruido aditivo y (5.34a)-(5.34e) para el multiplicativo. Como son ecuaciones lineales es fácil calcular sus soluciones. Imponiendo las condiciones iniciales $\langle v \rangle_0 \equiv \langle v(0) \rangle$, $\langle z \rangle_0 \equiv \langle z(0) \rangle$ etc, donde por $\langle \dots \rangle_0$ se entiende el valor medio de la variable en el instante inicial, estas soluciones son:

i) Ruido aditivo

$$\langle v(t) \rangle = \langle v \rangle_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.35a)$$

$$\langle z(t) \rangle = \langle z \rangle_0 + \frac{\langle v \rangle_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (5.35b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \langle v^2 \rangle_0 e^{-2\alpha t} + \frac{9D}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (5.35c)$$

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = & \langle z^2 \rangle_0 + \frac{2}{\alpha} \langle zv \rangle_0 (1 - e^{-2\alpha t}) + \frac{\langle v^2 \rangle_0}{\alpha^2} (1 - e^{-2\alpha t})^2 + \\ & + \frac{9D}{2\alpha^2} \left[2t + \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) (-3 + e^{-\alpha t}) \right], \end{aligned} \quad (5.35d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = \langle zv \rangle_0 e^{-\alpha t} + \frac{\langle v^2 \rangle_0}{\alpha} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{9D}{2\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2, \quad (5.35e)$$

que coinciden con (5.15a)-(5.15e) tal y como debía ocurrir. En ausencia de disipación ($\alpha \rightarrow 0$), estas soluciones se reducen a

$$\langle v(t) \rangle = \langle v \rangle_0, \quad (5.36a)$$

$$\langle z(t) \rangle = \langle z \rangle_0 + \langle v \rangle_0 t, \quad (5.36b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \langle v^2 \rangle_0 + 9Dt, \quad (5.36c)$$

$$\langle z^2(t) \rangle = \langle z^2 \rangle_0 + \langle zv \rangle_0 t + \langle v^2 \rangle_0 t^2 + 3Dt^3, \quad (5.36d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = \langle zv \rangle_0 + \langle v^2 \rangle_0 t + 9Dt^2, \quad (5.36e)$$

que muestran un comportamiento del kink no-newtoniano, ya que $z \sim t$ implicaría $z^2 \sim t^2$ y sin embargo $z^2 \sim t^3$. Lógicamente, ocurre lo mismo con la velocidad, pues $v \sim 1$ y $v^2 \sim t$.

ii) Ruido multiplicativo

$$\langle v(t) \rangle = \langle v \rangle_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.37a)$$

$$\langle z(t) \rangle = \langle z \rangle_0 + \frac{\langle v \rangle_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}), \quad (5.37b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \langle v^2 \rangle_0 e^{-2\alpha t}, \quad (5.37c)$$

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = & \langle z^2 \rangle_0 + \frac{2}{\alpha} \langle zv \rangle_0 (1 - e^{-2\alpha t}) + \frac{\langle v^2 \rangle_0}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2 + \\ & + \frac{9D}{4\alpha^2} \langle v^2 \rangle_0 (1 - e^{-2\alpha t}), \end{aligned} \quad (5.37d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = \langle zv \rangle_0 e^{-\alpha t} + \frac{\langle v^2 \rangle_0}{\alpha} e^{-\alpha t} (1 - e^{-\alpha t}). \quad (5.37e)$$

que son iguales a (5.18a)-(5.18e). Si no hubiera disipación se tendría:

$$\langle v(t) \rangle = \langle v \rangle_0, \quad (5.38a)$$

$$\langle z(t) \rangle = \langle z \rangle_0 + \langle v \rangle_0 t, \quad (5.38b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = \langle v^2 \rangle_0, \quad (5.38c)$$

$$\langle z^2(t) \rangle = \langle z^2 \rangle_0 + [2\langle zv \rangle_0 + \frac{9D}{2} \langle v^2 \rangle_0] t + \langle v^2 \rangle_0 t^2, \quad (5.38d)$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = \langle zv \rangle_0 + \langle v^2 \rangle_0 t. \quad (5.38e)$$

En este caso el comportamiento del kink es newtoniano y $z \sim t$, $z^2 \sim t^2$.

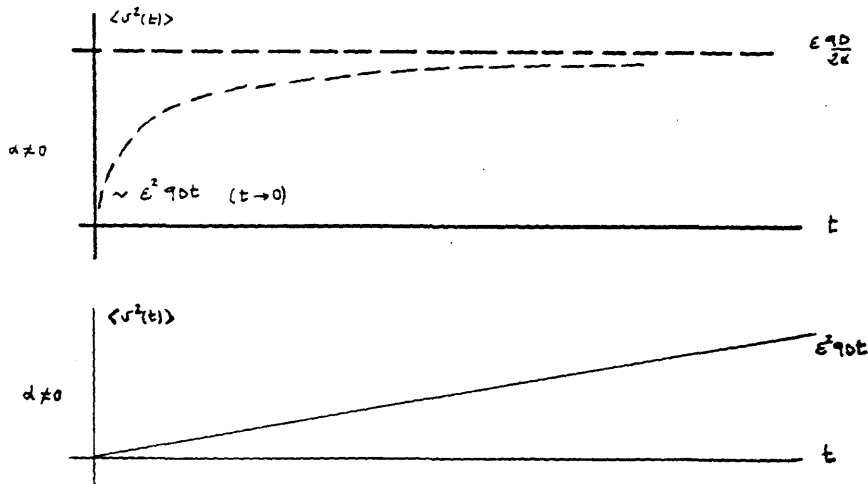
A la vista de estos resultados el movimiento de las ondas solitarias que nos ocupan depende mucho de que los valores medios iniciales sean nulos o no. La razón es debida a que en todas las ecuaciones desde (5.15) hemos omitido el factor ϵ por comodidad en la escritura y hay que introducirlo cambiando

$$D \longrightarrow \epsilon^2 D,$$

$$\alpha \longrightarrow \epsilon \alpha.$$

Así en el caso de un ruido aditivo con disipación, un kink que parta del reposo es siempre acelerado, aun cuando $\langle v \rangle = 0$, ya que $\langle v^2 \rangle = \epsilon \frac{9D}{2\alpha} (1 - e^{-2\epsilon\alpha t})$. Por

supuesto, esta aceleración es menor cuando hay disipación ($\alpha \neq 0$) que cuando no la hay. Gráficamente



De la misma forma $\langle z \rangle$ indica que no hay variación en el centro de la onda, pero $\langle z^2 \rangle = \frac{9D}{2\alpha^2} \left[2t + \frac{1}{\epsilon\alpha} (1 - e^{-\epsilon\alpha t}) (-3 + e^{-\epsilon\alpha t}) \right]$ es siempre creciente, y en el caso $\alpha = 0$ se reduce a $\langle z^2 \rangle = \epsilon^2 3Dt^3$.

Cuando los valores medios iniciales no son nulos, los efectos estocásticos y disipativos son correcciones de primer y segundo orden al movimiento sin perturbar, y en la mayoría de los casos inapreciables para el kink. Sin embargo estas variaciones existen, como se comprueba con el valor cuadrático medio de la velocidad o del centro de energías:

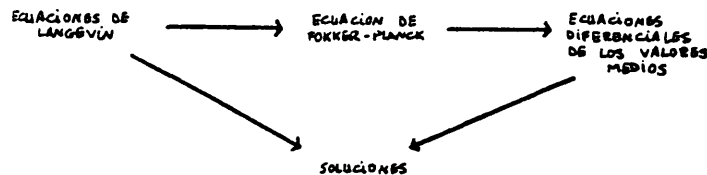
$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 &= \epsilon \frac{9D}{2\alpha} (1 - e^{-2\epsilon\alpha t}) = O(\epsilon^2) \\ \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 &= \frac{9D}{2\alpha^2} \left[2t + \frac{1}{\epsilon\alpha} (1 - e^{-\epsilon\alpha t}) (-3 + e^{-\epsilon\alpha t}) \right] = O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

En el caso multiplicativo nunca se altera la velocidad de los kinks de ϕ^4 , pero

el valor cuadrático medio del centro crece con el tiempo, alcanzando un valor límite cuando $\alpha \neq 0$, ya que

$$\begin{aligned}\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 &= 0 \quad \forall \alpha \\ \langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 &= \epsilon \frac{9D}{4\alpha} \langle v^2 \rangle_0 (1 - e^{-2\epsilon\alpha t}) = O(\epsilon^2) \\ &\rightarrow_{\alpha \rightarrow 0} \epsilon^2 \frac{9D}{2} \langle v^2 \rangle_0 t\end{aligned}$$

El esquema que hemos utilizado hasta ahora ha sido el siguiente



pero si son ecuaciones no-lineales las que tenemos que resolver la obtención de soluciones es mucho más difícil, y a veces imposible. Por ejemplo:

$$v(t) = \frac{\frac{1\sqrt{2}}{2} e^{-\alpha t} \int_0^t ds e^{\alpha s} F(s)}{\left[1 + \frac{9}{2} e^{-2\alpha t} \int_0^t ds_1 \int_0^t ds_2 e^{\alpha(s_1+s_2)} F(s_1) F(s_2) \right]^{1/2}}$$

es solución de (5.6) con $v(0) = 0$. Calcular en esta expresión $\langle v(t) \rangle$ es imposible si no se admite algún tipo de desarrollo en serie (tiempos pequeños, potencias de ϵ , etc...). Lo mismo sucede en las ecuaciones (5.27)-(5.31) y (5.33a)-(5.33e), donde para calcular $\langle v^2 \rangle$ es necesario conocer momentos de la velocidad de orden superior como $\langle v^4 \rangle$, o $\langle zv^3 \rangle$ para hallar $\langle zv \rangle$.

Y sin embargo, a veces es posible calcular esas soluciones, como veremos en el siguiente capítulo.

5.5 Aplicación a la ecuación de Sine-Gordon

Llevando a cabo las sustituciones (5.2) y (5.3) en las ecuaciones de la dinámica de los kinks de SG (3.32) y (3.33), dadas por

$$\begin{aligned} v'_{SG}(t) &= -\frac{\epsilon}{4}(1-v^2) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{R[u_0]}{\cosh \phi}, \\ z'_{SG}(t) &= v - \frac{\epsilon}{4}v(1-v^2)^{1/2} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\phi R[u_0]}{\cosh \phi}, \end{aligned}$$

y manteniendo $F(t)$ y $V(t)$ las mismas propiedades, se obtienen los siguientes resultados:

i) Ruido aditivo

En este caso

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{1}{4}(1-v^2)^{3/2} \Omega_1(\gamma, z) F(t) - \alpha v(1-v^2) \right], \quad (5.39a)$$

$$z'(t) = v + \epsilon \frac{1}{4}v(1-v^2) \Gamma_1(\gamma, z) F(t), \quad (5.39b)$$

donde

$$\Omega_1(\gamma, z) \equiv \arctan(\sinh \gamma(L-z)) + \arctan(\sinh \gamma(L+z)),$$

$$\Gamma_1(\gamma, z) \equiv \int_{-\gamma(L+z)}^{\gamma(L-z)} dx \frac{x}{\cosh x}.$$

Lo mismo que para ϕ^4 , la disipación sólo afecta explícitamente a la ecuación de la velocidad. En el límite $L \rightarrow +\infty$, $\Omega_1(\gamma, z) = \pi$ y $\Gamma_1(\gamma, z) = 0$ (por paridad), teniéndose entonces

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{\pi}{4} (1 - v^2)^{3/2} F(t) - \alpha v (1 - v^2) \right], \quad (5.40)$$

$$z'(t) = v. \quad (5.41)$$

Estas ecuaciones coinciden con (5.6) y (5.7), salvo un factor numérico: $\frac{3\sqrt{2}}{2} \rightarrow \frac{\pi}{4}$.

Para obtener magnitudes como E y P , dadas por (1.23) y (1.24), se tienen ahora las ecuaciones

$$E' + \alpha v^2 E = 2\pi v F(t), \quad (5.42a)$$

$$P' + \alpha P = 2\pi F(t), \quad (5.42b)$$

que han sido obtenidas con (5.40) y (5.41).

La ecuación de FP asociada a las ecuaciones de Langevin (5.40), (5.41) se puede obtener de (5.19) correspondiente a ϕ^4 con los cambios

$$F_{\phi^4} \rightarrow \frac{\pi}{6\sqrt{2}} F_{SG}$$

o bien

$$D_{\phi^4} \rightarrow \frac{\pi^2}{72} D_{SG},$$

obteniéndose por lo tanto

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \left[-\frac{\partial}{\partial z} v + \frac{\partial}{\partial v} \left(\alpha v (1 - v^2) + \frac{3\pi^2}{16} D v (1 - v^2)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{\pi^2}{16} D (1 - v^2)^3 \right] W. \quad (5.43)$$

De la misma forma puede procederse para la obtención de los valores medios a partir de (5.27)-(5.31). En este caso además

$$D_{\epsilon z t} \rightarrow \frac{D_{p u n t}}{(2\pi)^2}.$$

ii) Ruido multiplicativo

Ahora se parte de las ecuaciones

$$v'(t) = \epsilon \left[(1 - v^2)^{3/2} \Omega_2(\gamma, z) V(t) - \alpha v (1 - v^2) \right], \quad (5.44a)$$

$$z'(t) = v + \epsilon v (1 - v^2) \Gamma_2(\gamma, z) V(t), \quad (5.44b)$$

donde

$$\begin{aligned} \Omega_2(\gamma, z) &\equiv (\arctan \exp \gamma(L - z))^2 - (\arctan \exp \gamma(L + z))^2, \\ \Gamma_2(\gamma, z) &\equiv \int_{-\gamma(L+z)}^{\gamma(L-z)} dx \frac{x}{\cosh x} \arctan e^x. \end{aligned}$$

que en el límite $L \rightarrow +\infty$, se reducen a $\Omega_2(\gamma, z) = \frac{\pi^2}{4}$, $\Gamma_2(\gamma, z) \simeq 2.101 \equiv h$ (calculado numéricamente), con lo cual

$$v'(t) = \epsilon \left[\frac{\pi^2}{4} (1 - v^2)^{3/2} V(t) - \alpha v (1 - v^2) \right], \quad (5.45a)$$

$$z'(t) = v + \epsilon v (1 - v^2) h V(t), \quad (5.45b)$$

donde se ve que la ecuación de la velocidad coincide con la del caso aditivo excepto en un factor numérico π . La aparición de este factor se debe al hecho de que el kink de SG (1.21) pasa de 0 a 2π y $V(t)$ aparece multiplicado por u_0 en (5.3) [40].

Para E y P se obtienen ahora las ecuaciones

$$E' + \alpha v^2 E = 2\pi^2 v V(t), \quad (5.46a)$$

$$P' + \alpha P = 2\pi^2 V(t), \quad (5.46b)$$

Aunque (5.45a) aparece en el caso aditivo de ϕ^4 salvo un factor numérico, y (5.45b) en el multiplicativo, estas dos ecuaciones juntas como sistema de Langevin son equivalentes a una ecuación de FP mucho más complicada que ninguna de las vistas hasta ahora, pues en este caso,

$$\begin{aligned} h_z &= v, \\ h_v &= -\alpha v(1 - v^2), \\ g_{zz} &= h v(1 - v^2), \\ g_{zv} &= g_{vv} = 0, \\ g_{vv} &= \frac{\pi^2}{4}(1 - v^2)^{3/2}, \end{aligned}$$

por lo que (5.22) se escribiría como

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial t} = & \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(v + \frac{\pi^2}{4} h D(1 - v^2)^{3/2}(1 - 3v^2) \right) + \frac{\partial}{\partial v} \alpha v(1 - v^2) + \right. \\ & + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h^2 D v^2(1 - v^2)^2 + \frac{\partial^2}{\partial z \partial v} \frac{\pi^2}{2} h D v(1 - v^2)^{5/2} + \\ & \left. + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{\pi^4}{16} D(1 - v^2)^3 \right] W. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Las ecuaciones de variación de los valores medios asociados a (5.47) y obtenidos de igual manera que para ϕ^4 , son

$$\frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = -\alpha \langle v(1 - v^2) \rangle, \quad (5.48a)$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \rangle = \langle v \rangle + \frac{\pi^2}{4} D h \langle (1 - v^2)^{3/2}(1 - 3v^2) \rangle, \quad (5.48b)$$

$$\frac{d}{dt} \langle v^2(t) \rangle = -2\alpha \langle v^2(1 - v^2) \rangle + \frac{\pi^4}{8} D \langle (1 - v^2)^3 \rangle, \quad (5.48c)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle z^2(t) \rangle = & 2\langle zv \rangle + \frac{\pi^2}{2} D h \langle z(1 - v^2)^{3/2}(1 - 3v^2) \rangle + \\ & + 2D h^2 \langle v^2(1 - v^2)^2 \rangle, \end{aligned} \quad (5.48d)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle z(t)v(t) \rangle = & \langle v^2 \rangle - \alpha \langle zv(1 - v^2) \rangle + \frac{3\pi^2}{4} D h \langle v(1 - v^2)^{5/2} \rangle - \\ & - \frac{\pi^2}{2} D h \langle v^3(1 - v^2)^{3/2} \rangle. \end{aligned} \quad (5.48e)$$

El caso correspondiente a un kink no-relativista es resoluble exactamente, y sus ecuaciones correspondientes son

$$v' + \alpha v = \frac{\pi^2}{4} V(t), \quad (5.49a)$$

$$z' = v + h v V(t), \quad (5.49b)$$

obtenidas con la aproximación $v \ll 1$ en (5.45). Imponiendo las condiciones iniciales $v(0) = v_0$ y $z(0) = z_0$, las soluciones de este sistema son

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t} + \frac{\pi^2}{4} e^{-\alpha t} \int_0^t ds e^{\alpha s} V(s), \quad (5.50a)$$

$$\begin{aligned} z(t) = & z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + v_0 h \int_0^t ds e^{\alpha s} V(s) + \\ & + \frac{\pi^2}{4} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} V(s') + \\ & + \frac{\pi^2}{4} h \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} V(s) V(s'). \end{aligned} \quad (5.50b)$$

y los valores medios correspondientes, teniendo en cuenta que $V(t)$ satisface las propiedades (5.12),

$$\langle v(t) \rangle = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (5.51a)$$

$$\langle z(t) \rangle = z_0 + \frac{v_0}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\pi^2}{4} D h t, \quad (5.51b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 e^{-2\alpha t} + \frac{\pi^4 D}{16\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (5.51c)$$

$$\begin{aligned} \langle z^2(t) \rangle = & z_0^2 + \frac{2}{\alpha} z_0 v_0 (1 - e^{-\alpha t}) + \\ & + v_0^2 \left(\frac{1}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2 + \frac{D h^2}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right) + \\ & + \frac{\pi^2 D h}{2\alpha^2} v_0 \left(\alpha t (1 - 3e^{-\alpha t}) + 2(1 - e^{-\alpha t}) \right) + \\ & + \frac{\pi^2 D h}{2} z_0 t + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^4 D}{16\alpha^3} (2\alpha t - 2(1 - e^{-\alpha t})^2 - (1 - e^{-2\alpha t})) + \frac{\pi^4}{16} D^2 h^2 t^2 + \\
& + \frac{\pi^4 D^2 h^2}{16\alpha^2} (2\alpha t - (1 - e^{-2\alpha t})), \quad (5.51d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle z(t)v(t) \rangle &= z_0 v_0 e^{-\alpha t} + \frac{v_0^2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t}) + \\
& + \frac{\pi^4 D}{16\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t})^2 + \frac{3\pi^2}{4} D h v_0 t e^{-\alpha t}. \quad (5.51e)
\end{aligned}$$

Todas las integrales necesarias para obtener estos resultados aparecen en el Apéndice C, y a diferencia de lo que ocurría en ϕ^4 , ahora es necesario evaluar integrales en las que intervienen $\langle V(t_1)V(t_2)V(t_3)V(t_4) \rangle$ y no solamente $\langle V(t_1)V(t_2) \rangle$ como hasta ahora.

En este caso las desviaciones cuadráticas son

$$\begin{aligned}
\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2 &= \epsilon \frac{\pi^4 D}{16\alpha} (1 - e^{-2\epsilon\alpha t}) = O(\epsilon^2) \\
\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2 &= \epsilon v_0^2 \frac{D h^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\epsilon\alpha t}) + \\
& + \frac{\pi^2 D h}{2\alpha^2} v_0 [\epsilon\alpha t (-2e^{-2\epsilon\alpha t}) + 2(1 - e^{-\epsilon\alpha t})] + \\
& + \frac{\pi^4 D}{\epsilon 16\alpha^3} [\epsilon 2\alpha t - 2(1 - e^{-\epsilon\alpha t})^2 - (1 - e^{-2\epsilon\alpha t})] + \\
& + \epsilon^2 \frac{\pi^4 D^2 h^2}{16\alpha^2} [\epsilon 2\alpha t - (1 - e^{-2\epsilon\alpha t})] = O(\epsilon^2),
\end{aligned}$$

donde ya han sido colocadas las potencias de ϵ correspondientes. El kink es acelerado, aunque parta del reposo. En ausencia de disipación (5.51a)-(5.51e), se escriben como

$$\langle v(t) \rangle = v_0, \quad (5.52a)$$

$$\langle z(t) \rangle = z_0 + v_0 t + \frac{\pi^2}{4} D h t, \quad (5.52b)$$

$$\langle v^2(t) \rangle = v_0^2 + \frac{\pi^4 D}{8} t, \quad (5.52c)$$

$$\langle z^2(t) \rangle = z_0^2 + 2z_0 v_0 t + v_0^2 t^2 +$$

$$\begin{aligned}
 & + (2Dh^2v_0^2 + \frac{\pi^2}{2}Dhz_0)t + \\
 & + (\pi^2Dhv_0 + \frac{3\pi^4}{16}D^2h^2)t^2 + \\
 & + \frac{\pi^4}{24}Dt^3, \tag{5.52d}
 \end{aligned}$$

$$\langle z(t)v(t) \rangle = z_0v_0 + v_0^2t + \frac{3\pi^2}{4}Dhv_0t + \frac{\pi^4}{16}Dt^2, \tag{5.52e}$$

donde el comportamiento de la onda solitaria perturbada no es newtoniano, ya que $z \sim t$ y $z^2 \sim t^3$.

En cuanto a la ecuación de FP asociada al sistema lineal (5.49), es

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W}{\partial t} = & \left[-\frac{\partial}{\partial z} \left(v + \frac{\pi^2}{4}hD \right) + \frac{\partial}{\partial v} \alpha v + \frac{\partial^2}{\partial z^2} h^2 D v^2 + \right. \\
 & \left. + \frac{\partial^2}{\partial z \partial v} \frac{\pi^2}{2} h D v + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{\pi^4}{16} D \right] W. \tag{5.53}
 \end{aligned}$$

y las ecuaciones de variación de los valores medios deducidos de ella

$$\frac{d}{dt} \langle v(t) \rangle = -\alpha \langle v \rangle, \tag{5.54a}$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t) \rangle = \langle v \rangle + \frac{\pi^2}{4} D h, \tag{5.54b}$$

$$\frac{d}{dt} \langle v^2(t) \rangle = -2\alpha \langle v^2 \rangle + \frac{\pi^4}{8} D, \tag{5.54c}$$

$$\frac{d}{dt} \langle z^2(t) \rangle = 2\langle zv \rangle + \frac{\pi^2}{2} D h \langle z \rangle + 2Dh^2 \langle v^2 \rangle, \tag{5.54d}$$

$$\frac{d}{dt} \langle z(t)v(t) \rangle = \langle v^2 \rangle - \alpha \langle zv \rangle + \frac{3\pi^2}{4} D h \langle v \rangle. \tag{5.54e}$$

Las soluciones de estas ecuaciones son (5.51), como era de esperar.

CAPITULO 6

Resolución exacta de la densidad de probabilidad de velocidades en el caso aditivo

6.1 Introducción

Hasta ahora hemos visto las soluciones que se obtenían para los valores medios de los parámetros en el caso de movimientos no- relativistas del kink. Sin embargo, para el ruido aditivo se pueden calcular explícitamente los valores medios $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^4 \rangle$, $\langle v^6 \rangle$, etc. en función del tiempo, para todo rango de velocidades y no solamente velocidades pequeñas.

También puede calcularse la densidad de probabilidad $W(v, t)$ asociada.

Estos resultados se obtienen aprovechando la simplificación que se introduce en el problema al pasar a la variable momento en lugar de velocidad.

6.2 Valor medio de orden n del momento

La ecuación de la variación de la velocidad para un ruido aditivo con disipación en el modelo ϕ^4 es, como vimos en (5.6)

$$v' = \frac{3\sqrt{2}}{2}(1-v^2)^{3/2}F(t) - \alpha v(1-v^2). \quad (6.1)$$

Por otra parte, la energía E y el momento P asociado al kink (1.10) vienen dados por (1.12) y (1.13)

$$E = \frac{4}{3\sqrt{2}}\gamma,$$

$$P = \frac{4}{3\sqrt{2}}\gamma v,$$

con lo que las ecuaciones que deben satisfacer E y P , teniendo en cuenta (6.1), son:

$$E' + \alpha v^2 E = 2vF(t), \quad (6.2a)$$

$$P' + \alpha P = 2F(t). \quad (6.2b)$$

Como puede verse la ecuación para el momento es especialmente sencilla de resolver, y en ella aparece un término de rozamiento y una fuerza exterior. La integración de (6.2b) da como resultado

$$P(t) = P_0 e^{-\alpha t} + 2e^{-\alpha t} \int_0^t ds e^{\alpha s} F(s), \quad (6.3)$$

$$P(0) = P_0,$$

lo que permite escribir, si se tienen en cuenta las propiedades estadísticas (5.12) de $F(t)$,

$$\langle P \rangle = P_0 e^{-\alpha t}, \quad (6.4a)$$

$$\langle P^2 \rangle = P_0^2 e^{-2\alpha t} + \frac{4D}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (6.4b)$$

$$\langle P^3 \rangle = P_0^3 e^{-3\alpha t} + \frac{12D}{\alpha} P_0 e^{-\alpha t} (1 - e^{-2\alpha t}), \quad (6.4c)$$

y así sucesivamente, o bien las desviaciones

$$\begin{aligned} \langle (P - \langle P \rangle)^2 \rangle &= \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2 = \frac{4D}{\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}), \\ \langle (P - \langle P \rangle)^3 \rangle &= \langle P^3 \rangle - \langle P \rangle^3 = \frac{12D}{\alpha} P_0 e^{-\alpha t} (1 - e^{-2\alpha t}), \end{aligned}$$

etc., todas ellas de segundo orden en ϵ .

Más concretamente, en el caso $P_0 = 0$, se tiene

$$\langle P^{2n-1}(t) \rangle = 0, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (6.5a)$$

$$\langle P^{2n}(t) \rangle = \left(\frac{4D}{\alpha} \right)^n \frac{(2n)}{2^n n!} (1 - e^{-2\alpha t})^n. \quad (6.5b)$$

que cuando $\alpha \rightarrow 0$ se reduce a

$$\langle P^{2n}(t) \rangle = (4Dt)^n \frac{(2n)!}{n!}, \quad (6.6)$$

y en el caso estacionario $\alpha t \gg 1$ a

$$\langle P^{2n}(t) \rangle = \left(\frac{4D}{\alpha} \right)^n \frac{(2n)}{2^n n!}.$$

La ecuación de Fokker-Planck asociada a (6.2b) puede obtenerse utilizando (5.22)

y (5.23), y se escribiría entonces como

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W &= \left(\frac{\partial}{\partial P} \alpha P + \frac{\partial^2}{\partial P^2} 4D \right) W, \quad W = W(P, t) \\ W(P, 0) &= \delta(P), \end{aligned} \quad (6.7)$$

donde hemos puesto como condición inicial que la distribución de momentos tenga un pico en $P = 0$. La ecuación (6.7) corresponde al proceso Ornstein-Uhlenbeck, caracterizado por coeficientes deterministas lineales y de difusión constantes [38], [39], [42], [43] y su solución se escribe como

$$W(P, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{P^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.8)$$

que es una distribución Gaussiana cuya desviación cuadrática es variable en t , y viene dada por

$$\sigma^2(t) = \frac{4D}{\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}). \quad (6.9)$$

En el límite $t \rightarrow 0$,

$$\sigma^2 \sim 8Dt$$

y

$$W(P, t) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\rho}{\pi}} e^{-\rho P^2} \rightarrow \delta(P),$$

donde por ρ se ha definido la variable

$$\rho \equiv \frac{1}{16Dt}.$$

Los valores medios $\langle P^{2n} \rangle$ también pueden calcularse con (6.8) mediante la expresión

$$\langle P^{2n} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} P^{2n} W(P, t),$$

en la cual, utilizando el resultado

$$\int_0^\infty dx e^{-ax^2} x^{2n} = \sqrt{\pi} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^{n+1}} a^{-(2n+1)/2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

se obtiene que

$$\langle P^{2n} \rangle = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \sigma^{2n}$$

que concuerda con (6.5b) ya que

$$\frac{(2n)}{2^n n!} \equiv 1 \cdot 3 \dots (2n-1), \quad n = 1, 2, \dots$$

6.3 Solución exacta de $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^4 \rangle$ y $\langle v^6 \rangle$ en función del tiempo

Como ya hemos visto $P = \frac{4}{3\sqrt{2}}\gamma v$ y por lo tanto, invirtiendo esta ecuación

$$v(P) = \frac{r}{(1+r^2)^{1/2}} \quad (6.10)$$

donde

$$r \equiv \gamma v = \frac{3\sqrt{2}}{4}P.$$

Como $v = v(P)$,

$$\langle v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dP v(P) W(P, t)$$

donde $W(P, t)$ está dada por (6.8). Se tiene entonces que

$$\langle v^{2n-1} \rangle = 0,$$

por consideraciones de simetría, y

$$\begin{aligned} \langle v^{2n} \rangle &= \left\langle \frac{r^{2n}}{(1+r^2)^n} \right\rangle = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dr \frac{r^{2n}}{(1+r^2)^n} \left(\frac{2}{3\sqrt{\pi}\sigma} e^{-\frac{4r^2}{3\sigma^2}} \right) \\ &= 2 \left(\frac{b}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} dr \frac{r^{2n}}{(1+r^2)^n} e^{-br^2}, \end{aligned}$$

donde $b \equiv \frac{4}{9\sigma^2}$. Para $n = 1$

$$\langle v^2 \rangle = 2 \left(\frac{b}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\infty dr \frac{r^2}{(1+r^2)} e^{-br^2},$$

y utilizando el resultado

$$\int_0^\infty dz \frac{z^2}{1+z^2} e^{-bz^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left(b^{-1/2} + e^b R(b) \right), \quad (6.11)$$

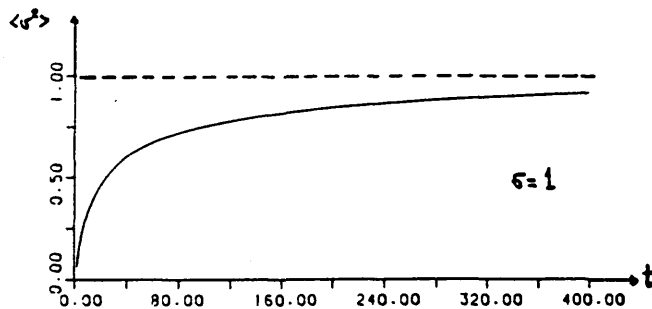
con $b > 0$ y $R(b)$ definida por

$$R(b) \equiv -\sqrt{\pi} + 2 \int_0^{\sqrt{b}} dt e^{-t^2}$$

se llega a la expresión

$$\langle v^2(t) \rangle_{ex} = 1 + b^{1/2} e^b R(b), \quad (6.12)$$

que es válida para todo rango de velocidades y no sólo para velocidades no relativistas. La forma de $\langle v^2 \rangle_{ex}$ viene representada en la figura



Vamos a ver ahora cómo se puede obtener la igualdad (6.11). Si denotamos

por

$$I_n(b) \equiv \int_0^\infty dz \left(\frac{z^2}{1+z^2} \right)^n e^{-bz^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$I_1(b)$ se puede escribir como

$$I_1(b) = -\frac{df_1(b)}{db}$$

donde

$$f_1(b) \equiv \int_0^\infty dz \frac{e^{-bz^2}}{1+z^2}.$$

Asimismo $f_1(b)$ se puede escribir como

$$f_1(b) = e^b g_1(b),$$

siendo $g_1(b)$ la integral

$$g_1(b) \equiv \int_0^\infty dz \frac{e^{-b(1+z^2)}}{1+z^2},$$

que es solución de la EDO

$$g_1'(b) = -\frac{e^{-b}}{2} \sqrt{\frac{\pi}{b}},$$

$$' \equiv \frac{d}{db}$$

con la condición inicial

$$g_1(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial, se tiene

$$g_1(b) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s}$$

y operando se llega a la expresión para $I_1(b)$

$$I_1(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} b^{-1/2} - \frac{\pi}{2} e^b + \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^b \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s}.$$

Para llegar al resultado que queremos obtener, hay que tener en cuenta la identidad

$$\int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s} \equiv 2 \int_0^{\sqrt{b}} dt e^{-t^2}.$$

Con igual procedimiento se obtiene $\langle v^4 \rangle$ y $\langle v^6 \rangle$, resultando

$$\langle v^4 \rangle_{\epsilon x} = (1+b) + \left(\frac{3}{2} + b\right) b^{1/2} e^b R(b) \quad (6.13),$$

$$\langle v^6 \rangle_{\epsilon x} = \left(1 + \frac{9}{4}b + \frac{b^2}{2}\right) + \left(\frac{15}{8} + \frac{5}{2}b + \frac{b^2}{2}\right) b^{1/2} e^b R(b) \quad (6.14).$$

Para obtener (6.13) y (6.14) ha sido necesario utilizar $I_2(b)$ e $I_3(b)$. En este caso

$$I_2(b) = f_2''(b),$$

donde $f_2(b)$ viene definido por

$$f_2(b) \equiv \int_0^\infty dz \frac{e^{-bz^2}}{(1+z^2)^2}$$

y es la solución de una cierta ecuación diferencial que no vamos a escribir. Esta solución es

$$f_2(b) = -\frac{\pi}{2} b e^b + \frac{\pi}{4} e^b + \frac{\sqrt{\pi}}{2} b e^b \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s} - \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^b \int_0^b ds s^{1/2} e^{-s}.$$

De igual forma,

$$I_3(b) = -f_3'''(b)$$

con

$$f_3(b) \equiv \int_0^\infty dz \frac{e^{-bz^2}}{(1+z^2)^3},$$

y que una vez resuelta su correspondiente ecuación, la solución se expresa como

$$f_3(b) = \left(\frac{3\pi}{16} - \frac{\pi}{4}b + \frac{\pi}{4}b^2 \right) e^b - \frac{\sqrt{\pi}}{4} e^b \int_0^b ds s^{3/2} e^{-s} + \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2} b e^b \int_0^b ds s^{1/2} e^{-s} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} b^2 e^b \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s}.$$

Las igualdades

$$\int_0^b ds s^{1/2} e^{-s} = -b^{1/2} e^{-b} + \frac{1}{2} \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s}, \\ \int_0^b ds s^{3/2} e^{-s} = -\left(\frac{3}{2} + b \right) b^{1/2} e^{-b} + \frac{3}{4} \int_0^b ds s^{-1/2} e^{-s},$$

son también necesarias para obtener (6.13) y (6.14).

Con (6.12)-(6.14) es fácil probar que se satisface la igualdad (5.28)

$$\frac{d}{dt} \langle v^2 \rangle = -2\alpha \langle v^2 (1 - v^2) \rangle + 9D \langle (1 - v^4)(1 - v^2)^2 \rangle.$$

Casos interesantes a destacar son :

i) $\alpha = 0, \quad t \rightarrow \infty$

En este caso

$$b = \frac{1}{18Dt} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0,$$

y $R(b)$ se puede poner, con ayuda de (D.1) como

$$R(b) \underset{b \rightarrow 0}{\sim} -\sqrt{\pi} + 2b^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n! (2n+1)},$$

con lo que para el valor asintótico de $\langle v^2 \rangle$ nos queda

$$\langle v^2 \rangle_{\epsilon x} \underset{b \rightarrow 0}{\sim} 1 + e^{b^{1/2}} \left(-\sqrt{\pi} + 2b^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n! (2n+1)} \right).$$

ii) $\alpha = 0, \quad t \rightarrow 0$

Ahora

$$b = \frac{1}{18Dt} \underset{t \rightarrow 0}{\rightarrow} \infty,$$

y teniendo en cuenta (D.2),

$$R(b) \underset{b \rightarrow \infty}{\sim} -b^{-1/2} e^{-b} \left(1 - \frac{1}{2b} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 b^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 b^3} + \dots + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n b^n} \right),$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_{\epsilon x} \underset{b \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n b^n} = \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} 1 \cdot 3 \dots (2n-1) \left(\frac{9}{8} \sigma^2 \right)^n, \end{aligned} \quad (6.15)$$

donde $\sigma^2 = 8Dt$. Si desarrollamos (6.15), obtenemos

$$\langle v^2 \rangle_{\epsilon x} \sim 9Dt - 243D^2 t^2 + \dots$$

que coincide con (5.36c) en el orden más bajo de aproximación.

iii) $\alpha \neq 0, \quad \sigma^2 \sim \frac{4D}{\alpha}$

En esta situación tenemos que

$$b = b_0 \equiv \frac{\alpha}{9D}.$$

Como la función

$$F(x) = \int_0^x dt e^{-t^2}$$

se puede desarrollar en serie de Taylor en un entorno de x_0 mediante la expresión

$$F(x) = F(x_0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-x_0^2} H_n(x_0)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

donde $H_n(x)$ son los polinomios de Hermite, se tiene

$$R(b) \sim -\sqrt{\pi} + 2 \left(F(b_0^{1/2}) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-b_0} H_n(b_0^{1/2})}{(n+1)!} (b^{1/2} - b_0^{1/2})^{n+1} \right),$$

que introducido en $\langle v^2 \rangle$ da el resultado

$$\begin{aligned} \langle v^2 \rangle_{ex} \underset{b \rightarrow b_0}{\sim} & 1 - e^{b_0} b_0^{1/2} (\sqrt{\pi} - 2F(b_0^{1/2})) + \\ & 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{b_0^{1/2} H_n(b_0^{1/2})}{(n+1)!} (b^{1/2} - b_0^{1/2})^{n+1}. \end{aligned}$$

Utilizando las expresiones de $R(b)$ cuando $b \rightarrow 0$ y $b \rightarrow \infty$ dadas anteriormente, también se pueden obtener los límites

$$\begin{aligned} \langle v^4 \rangle_{ex} \underset{b \rightarrow 0}{\sim} & (1+b) + \left(\frac{3}{2} + b \right) b^{1/2} e^b \left(-\sqrt{\pi} + 2b^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^n}{n! (2n+1)} \right), \\ \langle v^4 \rangle_{ex} \underset{b \rightarrow \infty}{\sim} & \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{(2b)^n} (n-1). \end{aligned}$$

6.4 Expresión explícita de $W(v, t)$

La ecuación

$$\frac{\partial}{\partial t} W = \left[\frac{\partial}{\partial v} \left(\alpha v(1 - v^2) + \frac{27}{2} D v(1 - v^2)^2 \right) + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \frac{9}{2} D(1 - v^2)^3 \right] W, \quad (6.16)$$
$$W(v, 0) = \frac{\delta(v)}{(1 - v^2)^{3/2}}$$

obtenida integrando en z (5.19) y suponiendo que $W(z, v, t)$ tiende a cero con suficiente rapidez en el infinito, es difícil de resolver directamente. Hasta ahora se saben encontrar soluciones exactas de la ecuación de Fokker-Planck [39] en los siguientes casos:

- 1- Cuando la parte determinista es lineal y los coeficientes de difusión son constantes. La distribución resultante es una distribución Gaussiana en las variables del problema.
- 2- Cuando hay una condición de balance detallado y los coeficientes deterministas y de difusión obedecen ciertas condiciones de potencial. La solución estacionaria se puede obtener por cuadraturas.
- 3- Si en el problema hay una sola variable se puede obtener la solución estacionaria.
- 4- Empleando separación de variables siempre y cuando las ecuaciones resultantes sean sencillas de resolver.
- 5- Mediante cambios de variable que la reduzcan a casos más simples.

Evidentemente, este es nuestro caso, porque el cambio de variable que simplifica estas ecuaciones es $P = \frac{4}{3\sqrt{2}} \gamma v$ como ya hemos visto. Así pues, si hacemos en (6.8)

este cambio, y tenemos en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dP W(P, t) = \int_{-1}^1 dv W(v, t) \quad (6.17)$$

obtendremos

$$W(v, t) = \frac{2}{3\sqrt{\pi\sigma}(1-v^2)^{3/2}} e^{-\frac{4v^2}{3\sigma^2(1-v^2)}}, \quad (6.18)$$

que es solución de (6.16). Las funciones $e^{-\frac{4v^2}{3\sigma^2(1-v^2)}}$ son funciones de soporte compacto utilizadas en distribuciones y pertenecientes al conjunto $C^\infty(-1, 1)$ [24].

Para terminar decir que (6.18) no sólo es la distribución de probabilidad de velocidades en el caso aditivo del modelo ϕ^4 , sino también la del aditivo y multiplicativo de SG, ya que para este campo se tienen las ecuaciones (5.40) y (5.45a):

$$\begin{aligned} v' &= \frac{\pi}{4}(1-v^2)^{3/2}F(t) - \alpha v(1-v^2), & \text{aditivo} \\ v' &= \frac{\pi^2}{4}(1-v^2)^{3/2}V(t) - \alpha v(1-v^2). & \text{multiplicativo} \end{aligned}$$

y por lo tanto basta hacer el cambio:

$$D_{\phi^4} \longrightarrow \frac{\pi^2}{72} D_{SG},$$

para la primera y

$$D_{\phi^4} \longrightarrow \frac{\pi^4}{72} D_{SG}$$

para la segunda en la ecuación (6.18).

- 112 -

PARTE II

ESTUDIO NUMERICO DE LA ECUACION

CAPITULO 7

Integración numérica de ϕ^4 con perturbación

7.1 Introducción

Una parte importante de este trabajo ha consistido en la corroboración numérica de los resultados obtenidos analíticamente. Para llevarla a cabo ha sido necesario elegir aquel o aquellos esquemas numéricos que mejor describían el sistema. Se ha escogido un esquema numérico que conserva la energía, aunque no el momento, y esa conservación ha servido para comprobar la convergencia y estabilidad del mismo.

En este capítulo aparece ese esquema así como las discretizaciones que proporciona para cantidades como la energía, el momento, la velocidad y el centro de energías. También se incluyen los problemas que aparecen en la frontera y el tratamiento que se les ha dado.

La generación de números aleatorios distribuidos normalmente, y justificada por el *teorema del límite* de la teoría de probabilidades aparece al final del capítulo, así como las condiciones bajo las que hemos realizado la integración numérica.

7.2 Esquema numérico para el modelo ϕ^4 sin perturbar

Como hasta ahora, nuestra ecuación de partida es

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0, \quad (7.1)$$

que multiplicada por u_t se puede escribir como

$$\left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 \right)_{,t} - (u_x u_t)_{,x} = 0.$$

Si se define E , la energía asociada a las soluciones de la ecuación (7.1), por

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 \right), \quad (7.2)$$

se puede obtener de la anterior relación

$$\frac{dE}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{constante} \quad (7.3)$$

siempre y cuando u y sus derivadas tiendan a cero con suficiente rapidez en el infinito. La ecuación (7.2) no es nueva, pues coincide con la definición (1.12). De igual forma, multiplicando (7.1) por u_x se tiene que

$$-(u_x u_t)_{,t} + \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) - \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 \right)_{,x} = 0$$

y si definimos el momento P como

$$P \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_x u_t, \quad (7.4)$$

tendremos que

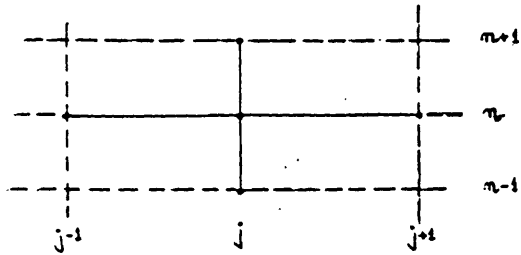
$$\frac{dP}{dt} = 0 \quad \Rightarrow P = \text{constante}, \quad (7.5)$$

donde lo mismo que antes (7.4), es la definición (1.13).

El esquema numérico propuesto en este trabajo para integrar numéricamente (7.1) viene dado por

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} = 0 \quad (7.6)$$

donde $n = 1, 2, 3, \dots$, $j = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, $G(x) \equiv \frac{1}{4}(x^2 - 1)^2$ y u_j^n es el valor del campo $u(x, t)$ en los puntos $u(j\Delta x, n\Delta t)$, donde Δt y Δx son los tamaños de la red temporal y espacial elegidos para integrar la ecuación.



Este esquema permite hallar u_j^{n+1} conociendo cuatro valores de u en instantes anteriores. Si u_j^{n+1} no se puede despejar explícitamente de (7.6), que es lo más usual, se emplea el método de Newton [49] para calcular dicho valor.

Veamos ahora qué discretizaciones proporciona (7.6) para las cantidades (7.2) y (7.4). Para ello, vamos a repetir los mismos pasos que nos han conducido a E y P en este apartado:

i) Energía

En primer lugar habíamos multiplicado (7.1) por u_t , ahora vamos a multiplicar (7.6) por

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t},$$

que es una discretización consistente de esta cantidad cuando $\Delta t \rightarrow 0$. Si se tienen en cuenta las identidades:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right)^2 - \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2}{\Delta t}, \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\Delta x} \left[\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2\Delta t} \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.8)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{G(u_j^{n+1}) + G(u_j^n)}{2} - \frac{G(u_j^n) + G(u_j^{n-1})}{2} \right) \end{aligned} \quad (7.9)$$

y después de multiplicar por Δx y sumar sobre $\sum_{j=-\infty}^{+\infty}$, se obtiene la ecuación

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = 0, \quad \forall n \geq 1, \quad (7.10)$$

donde hemos definido E^n como

$$\begin{aligned} E^n \equiv \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (G(u_j^n) + G(u_j^{n-1})) \right], \end{aligned} \quad (7.11)$$

que es exactamente la versión discretizada de (7.2). Nótese que (7.10) es una ecuación de conservación, pues de ella se deduce que

$$E^n = E^1,$$

y además lo es porque el sumatorio de (7.11) está extendido de $-\infty$ a $+\infty$, ya que si se tuviera $\sum_{j=j_1}^{j_2}$ con j_1, j_2 finitos, E^n no sería conservada. Es aquí, precisamente, donde intervienen las condiciones frontera, de las que hablaremos posteriormente.

ii) Momento

Multiplicando ahora (7.6) por u_x discretizado como

$$\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right),$$

y teniendo en cuenta las identidades

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\Delta t} \left[\left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) - \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} \right) \right] - \\ & - \frac{1}{2\Delta x} \left[\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \quad (7.12)$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right)^2}{\Delta x}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

se obtiene, después de multiplicar por Δx y sumar sobre $\sum_{j=-\infty}^{+\infty}$,

$$\frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right) \left(\frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} \right), \quad (7.14)$$

donde P^n está definido por

$$P^n \equiv - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j+1}^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta x} \right). \quad (7.15)$$

Es importante darse cuenta de que (7.14) no es una ley de conservación y que por lo tanto, no reproduce discretamente la ecuación (7.5). Esto se debe a la forma del esquema (7.6) utilizado para discretizar (7.1). Sin embargo, posteriormente veremos en los resultados numéricos que las variaciones de P^n inducidas por este esquema son de orden despreciable frente a P^n .

No sería difícil escribir un esquema que conservara el momento, pero sin embargo la energía habría dejado de serlo. Como la densidad T_1 dada en (1.8a) es definida positiva, hemos preferido mantener el esquema en que lo constante fuera la energía, ya que así nos evita posibles no-acotaciones de la función u cuando se obtiene su valor numéricamente.

Si hay algún esquema que conserve E y P simultáneamente, no se trata aquí.

Por último decir que (7.7), (7.8), (7.9), (7.12) y (7.13) son las discretizaciones

exactas de

$$\begin{aligned} u_t u_{tt} &\equiv \frac{1}{2} (u_t^2)_{,t}, \\ u_t u_{xz} &\equiv (u_x u_t)_{,z} - \frac{1}{2} (u_x^2)_{,t}, \\ u_t G'(u) &\equiv (G(u))_{,t}, \\ u_x u_{tt} &\equiv (u_x u_t)_{,t} - \frac{1}{2} (u_t^2)_{,x}, \\ u_x u_{xz} &\equiv \frac{1}{2} (u_x^2)_{,z}, \end{aligned}$$

respectivamente.

7.3 Centro de energías y velocidad

Como ya vimos en el Capítulo 1, el centro de energías asociado a la ecuación (7.1) lo definimos mediante

$$X_c = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx x T_1}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx T_1},$$

donde

$$T_1 \equiv \frac{1}{2} (u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4} (u^2 - 1)^2.$$

Para el esquema (7.6), esta cantidad la expresaremos como

$$\begin{aligned} X_c^n &\equiv \frac{1}{E^n} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left\{ \frac{x_j}{2} \left[\left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right)^2 + G(u_j^n) + G(u_j^{n-1}) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{x_j + x_{j-1}}{2} \right) \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (7.16)$$

donde $x_j \equiv j\Delta x$. En un sumando se ha introducido x_j y en otro $\frac{x_j + x_{j-1}}{2}$ para mantener la estructura de la expresión, y que sea evaluada en las mismas coordenadas x que lo es u .

También vimos en el Capítulo 1 que (7.1) tiene como solución al kink

$$u_0 = \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(x - vt - x_0),$$

cuya energía, momento y centro son

$$\begin{aligned} E &= \frac{4\gamma}{3\sqrt{2}}, \\ P &= \frac{4\gamma v}{3\sqrt{2}}, \\ X_c &= vt + x_0, \end{aligned}$$

por lo que se definimos

$$\begin{aligned} v_1 &\equiv \frac{P}{E} \\ v_2 &\equiv \frac{dX_c}{dt} \end{aligned}$$

se tiene que

$$v_1 = v_2 = v.$$

En el esquema discreto definiremos

$$v_1^n \equiv v_1(n\Delta t) \equiv \frac{P^n}{E^n}, \quad (7.17)$$

$$v_2^n \equiv \frac{X_c^{n+1} - X_c^n}{\Delta t}, \quad (7.18)$$

y compararemos ambos resultados. Las variables X_c^n , v_1^n (ó v_2^n) son los parámetros modulados en el tiempo por la perturbación.

7.4 Efectos en la frontera

Evidentemente, la integración numérica de la ecuación (7.1) no puede hacerse en un intervalo infinito por limitaciones de los ordenadores. Esto quiere decir que en $x_j = j\Delta x$, j va desde j_1, \dots, j_2 con j_1 y j_2 finitos, lo que origina errores en la integración debido a la frontera. Desde luego estos no son los únicos errores que aparecen, pues en el cálculo también se arrastran errores en los datos iniciales, de redondeo, etc. Veamos cuáles son los errores en la frontera:

i) Energía

La ecuación (7.10) se escribiría en realidad como

$$\frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left[\left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right] \equiv 0,$$

porque los términos contiguos se cancelan unos con otros, pero si $j_1 \leq j \leq j_2$ entonces

$$\begin{aligned} \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = & \left(\frac{u_{j_2}^n - u_{j_2-1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j_2-1}^{n+1} - u_{j_2-1}^{n-1}}{2\Delta t} \right) - \\ & - \left(\frac{u_{j_1+1}^n - u_{j_1}^n}{\Delta x} \right) \left(\frac{u_{j_1}^{n+1} - u_{j_1}^{n-1}}{2\Delta t} \right), \end{aligned} \quad (7.19)$$

pues no hay cancelación en los extremos, lo que indica que E^n no se conserva exactamente.

ii) Momento

En cuando al momento, (7.14) es en realidad

$$\begin{aligned} \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j+1}^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) - \right. \right. \\ \left. \left(\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\Delta x} \right)^2 \right] + \\ \left. + \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right) \frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} \right\}, \end{aligned}$$

de donde se deduce sin dificultad que

$$\begin{aligned} \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{u_{j_2}^n - u_{j_2}^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j_2-1}^n - u_{j_2-1}^{n-1}}{\Delta t} \right) - \right. \\ \left. - \left(\frac{u_{j_1+1}^n - u_{j_1+1}^{n-1}}{\Delta t} \right) \left(\frac{u_{j_1}^n - u_{j_1}^{n-1}}{\Delta t} \right) + \right. \\ \left. + \left(\frac{u_{j_2}^n - u_{j_2-1}^n}{\Delta x} \right)^2 - \left(\frac{u_{j_1+1}^n - u_{j_1}^n}{\Delta x} \right)^2 \right] + \\ + \sum_{j=j_1+1}^{j_2-1} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2} \right) \left(\frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} \right). \end{aligned} \quad (7.20)$$

Nosotros pretendemos comprobar numéricamente unos resultados obtenidos analíticamente, por lo que debemos reproducir las condiciones para las que se ha resuelto el problema analítico, y siempre teniendo en cuenta que unas condiciones frontera mal puestas pueden originar inestabilidades. Vamos a emplear en los bordes de integración la condición $u_t = 0$, es decir

$$u_{j_1}^n = u_{j_1}^0 \quad \forall n \geq 1$$

y lo mismo para j_2 , que es bastante apropiada cuando la velocidad del solitón es pequeña y no se encuentra muy excitado.

En la integración numérica hemos evitado los problemas en la frontera limitándonos a cálculos en tiempos menores del que sería necesario para que aquella influyera, por efectos de reflexión del frente de la onda en los bordes , en nuestros resultados. De esta manera esos efectos son despreciables.

7.5 Convergencia y estabilidad del esquema

Para poder aplicar (7.6) es necesario estudiar su convergencia y estabilidad.

En una ecuación lineal un esquema es convergente si y sólo si es estable, pero no sucede así en ecuaciones no-lineales, donde cada propiedad debe estudiarse por separado. El esquema (7.6) tiene la ventaja de poseer una energía discreta conservada, lo que permite probar su convergencia y estabilidad. La forma de hacerlo es la siguiente: al pretender estimar u_j^n mediante un esquema numérico se produce un error debido a los datos iniciales, a los sucesivos pasos de cálculo, etc. Dicho error lo denotaremos por \bar{u}_j^n y satisface la ecuación que se obtiene de sustituir u_j^n por $u_j^n + \bar{u}_j^n$ en (7.6). Esta ecuación es

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{u}_j^{n+1} - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{\bar{u}_{j+1}^n - 2\bar{u}_j^n + \bar{u}_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{G(\bar{u}_j^{n+1}) - G(\bar{u}_j^{n-1})}{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1}} + R_j^{[n-1, n+1]} = 0, \end{aligned} \quad (7.21)$$

donde $R_j^{[n-1, n+1]}$ viene dado por

$$\begin{aligned} R_j^{[n-1, n+1]} & \equiv R_j(u_j^{n+1}, u_j^{n-1}, \bar{u}_j^{n+1}, \bar{u}_j^{n-1}) = \\ & = \frac{1}{4} \left[\bar{u}_j^{n+1} \left(3(u_j^{n+1})^2 + 2u_j^{n+1}u_j^{n-1} + (u_j^{n-1})^2 \right) + \right. \\ & \quad + \bar{u}_j^{n-1} \left(3(u_j^{n-1})^2 + 2u_j^{n+1}u_j^{n-1} + (u_j^{n+1})^2 \right) + \\ & \quad + (\bar{u}_j^{n+1})^2 \left(3u_j^{n+1} + u_j^{n-1} \right) + \\ & \quad + (\bar{u}_j^{n-1})^2 \left(3u_j^{n-1} + \bar{u}_j^{n+1} \right) + \\ & \quad \left. + 2\bar{u}_j^{n+1}\bar{u}_j^{n-1}(u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

Multiplicando (7.22) por $\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1}}{2\Delta t}$ y sumando sobre j , se obtiene que

$$\frac{\bar{E}^{n+1} - \bar{E}^n}{\Delta t} + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x R_j^{[n-1, n+1]} \left(\frac{\bar{u}_j^{n+1} - \bar{u}_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0, \quad (7.23)$$

donde \bar{E}^n está definido igual que E^n pero con \bar{u} en lugar de u . La cantidad $\bar{E}^{n+1} - \bar{E}^n/\Delta t$ no tiene por qué conservarse ahora, pero la acotación de esta cantidad lleva directamente a probar la convergencia y estabilidad. Dicha acotación se hace de igual forma que en el caso de SG, lo que puede verse en las referencias [47], [48] y por eso no lo escribiremos aquí.

En el caso de una ecuación de ondas en que no hay término lineal

$$u_{tt} - u_{xx} = 0,$$

la condición de estabilidad del esquema es [46]

$$\left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2 < 1. \quad (7.24)$$

La velocidad de la red $\Delta x/\Delta t$ es mayor, por lo tanto, que la velocidad máxima que nosotros empleamos $v = 1$, y (7.24) indica que no hay ninguna posibilidad de interferencia en el cálculo.

Para el caso no-lineal de ϕ^4 , se obtiene de nuevo la condición (7.24) [47], [48], por lo que siempre la utilizaremos en nuestros cálculos.

7.6 Esquema numérico para la ecuación perturbada

Para la ecuación

$$u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 + F(x, t) + V(x, t)u + \alpha u_t = 0, \quad (7.25)$$

el esquema de integración empleado es

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\Delta t^2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \\ & + \frac{G(u_j^{n+1}) - G(u_j^{n-1})}{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}} + \\ & + \frac{F_j^{n+1} + F_j^{n-1}}{2} + \left(\frac{V_j^{n+1} + V_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) + \\ & + \alpha \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (7.26)$$

donde en cada paso u_j^{n+1} se determina mediante el método de Newton.

Como F , V y αu_t son perturbaciones, la energía de la onda inicial (7.2) en lugar de ser constante tiene la variación

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_t (F + Vu + \alpha u_t); \quad (7.27)$$

el momento viene dado por (7.14) y

$$\frac{dP}{dt} = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_x (F + Vu + \alpha u_t),$$

o bien

$$\frac{dP}{dt} + \alpha P = - \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_x (F + Vu). \quad (7.28)$$

Estas expresiones se pueden escribir, con ayuda de (7.26) como

$$\begin{aligned} \frac{E^{n+1} - E^n}{\Delta t} = & - \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left[\frac{F_j^{n+1} + F_j^{n-1}}{2} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{V_j^{n+1} + V_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) + \alpha \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.29)$$

que corresponde a (7.27) y donde E^n está dado por (7.11) y

$$\begin{aligned} \frac{P^{n+1} - P^n}{\Delta t} + \alpha P = & \\ = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \left[\frac{F_j^{n+1} + F_j^{n-1}}{2} + \left(\frac{V_j^{n+1} + V_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.30)$$

siendo P^n (7.15).

Las cantidades v_1^n , v_2^n y X_c^n se calculan ahora igual que en (7.16), (7.17) y (7.18). En ellas no aparecen F , V ni α explícitamente, pero se han introducido a través de u como solución de (7.25). Son los valores medios de estas variables, y de sus cuadrados los que vamos a determinar numéricamente, y cuyo valor teórico en función del tiempo se ha calculado en el Capítulo 5.

Los valores medios se encuentran integrando (7.26) varias veces ($L = 30$, por ejemplo) para cada instante de tiempo y cada coordenada del espacio, y luego promediando sobre esos valores.

Si (7.25) no se ve como una ecuación perturbativa de $u_{tt} - u_{xx} - u + u^3 = 0$, sino como una ecuación a resolver con un cierto dato inicial, multiplicándola por u_t resulta

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 + Fu + \frac{1}{2}Vu^2 \right)_{,t} - \\ & - (u_x u_t)_{,x} - F_t u - \frac{1}{2}V_t u^2 + \alpha u_t^2 = 0, \end{aligned} \quad (7.31)$$

donde ahora

$$E_T \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(\frac{1}{2}(u_t^2 + u_x^2) + \frac{1}{4}(u^2 - 1)^2 + Fu + \frac{1}{2}Vu^2 \right) \quad (7.32)$$

es la energía total y su variación respecto al tiempo viene dada por

$$\frac{dE_T}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(F_t u + \frac{1}{2}V_t u^2 - \alpha u_t^2 \right) = 0. \quad (7.33)$$

El momento total se define de la misma forma que antes

$$P_T \equiv - \int_{-\infty}^{+\infty} dx u_x u_t,$$

y su variación se expresa como

$$\frac{dP_T}{dt} = -\alpha P - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left(F_x u + \frac{1}{2}V_x u^2 \right). \quad (7.34)$$

Las discretizaciones de (7.32) y (7.33) proporcionadas por (7.26) son

$$E_T^n = E^n + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left(\frac{F_j^n u_j^n + F_j^{n-1} u_j^{n-1}}{2} + \frac{V_j^n u_j^n + V_j^{n-1} u_j^{n-1}}{4} \right), \quad (7.35)$$

con E^n dado en (7.11), y

$$\begin{aligned} \frac{E_T^{n+1} - E_T^n}{\Delta t} &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x \left[\left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{V_j^{n+1} - V_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{(u_j^{n+1})^2 + (u_j^{n-1})^2}{2} \right) - \alpha \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (7.36)$$

respectivamente.

En cuanto a $X_{T,c}^n$, en este caso es

$$X_{T,c}^n \equiv \frac{1}{E_T^n} \left[E^n X_c^n + \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \Delta x x_j \left(\frac{F_j^n u_j^n + F_j^{n-1} u_j^{n-1}}{2} + \frac{V_j^n (u_j^n)^2 + V_j^{n-1} (u_j^{n-1})^2}{4} \right) \right], \quad (7.37)$$

donde X_c^n ha sido definido en (7.26).

Para la obtención de estas tres últimas ecuaciones se han utilizado las igualdades

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^{n-1}}{2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_j^{n+1} F_j^{n+1} + u_j^n F_j^n}{2} - \frac{u_j^n F_j^n + u_j^{n-1} F_j^{n-1}}{2} \right) - \\ & - \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{F_j^{n+1} - F_j^{n-1}}{2\Delta t} \right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} & \left(\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\Delta t} \right) \left(\frac{V_j^{n+1} + V_j^{n-1}}{2} \right) \left(\frac{u_j^{n+1} + u_j^{n-1}}{2} \right) \equiv \\ & \equiv \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{V_j^{n+1} (u_j^{n+1})^2 + V_j^n (u_j^n)^2}{2} - \frac{V_j^n (u_j^n)^2 + V_j^{n-1} (u_j^{n-1})^2}{2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{(u_j^{n+1})^2 + (u_j^{n-1})^2}{2} \right) \left(\frac{V_j^{n+1} - V_j^{n-1}}{2\Delta t} \right). \end{aligned}$$

7.7 Simulación numérica del ruido

En todo este trabajo hemos supuesto que $F(t)$ y $V(t)$ eran ruidos Gaussianos variando estocásticamente en el tiempo con las propiedades

$$\langle F(t) \rangle = 0, \quad (7.38a)$$

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2D\delta(t - t'). \quad (7.38b)$$

La simulación de estos ruidos se ha llevado a cabo con un generador de números aleatorios distribuidos según una densidad de probabilidad Gaussiana, es decir:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in (-\infty, +\infty).$$

El valor medio a y la varianza σ^2 se han elegido como

$$a = 0, \quad (7.39a)$$

$$\sigma^2 = \frac{2D}{\Delta t}. \quad (7.39b)$$

ya que estos valores son los que ajustan (7.38a)-(7.38b).

La elección de a es trivial por (7.38a), y sólo vamos a mostrar por qué se toma σ^2 así.

Al discretizar se pasa de una función estocástica "continua" $F(t)$ a otra "discreta" de la forma

$$F^n = \frac{1}{\Delta t} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} ds F(s),$$

y por lo tanto

$$\langle F^n F^m \rangle = \frac{1}{\Delta t^2} \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} ds \int_{m\Delta t}^{(m+1)\Delta t} ds' \langle F(s)F(s') \rangle = \frac{2D}{\Delta t} \delta_{nm},$$

donde ya se ha utilizado (7.38b). De aquí se obtiene

$$\sigma^2 = \langle (F^n)^2 \rangle = \frac{2D}{\Delta t},$$

que era lo que queríamos probar.

La generación de números aleatorios a la que hemos hecho referencia se basa en un conocido teorema empleado en el Método de Montecarlo: el *teorema central del límite*.

Este teorema puede enunciarse así: Sean N variables aleatorias $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N$ independientes e idénticas de modo que sus distribuciones de probabilidad coincidan. En este caso

$$\begin{aligned} \langle \xi_1 \rangle &= \langle \xi_2 \rangle = \dots = \langle \xi_N \rangle = m, \\ \langle \xi_1 - \langle \xi_1 \rangle \rangle &= \langle \xi_2 - \langle \xi_2 \rangle \rangle = \dots = \langle \xi_N - \langle \xi_N \rangle \rangle = b^2. \end{aligned}$$

Designemos por ρ_N la suma de estas variables

$$\rho_N = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_N$$

con lo que

$$\langle \rho_N \rangle = \langle \xi_1 \rangle + \langle \xi_2 \rangle + \dots + \langle \xi_N \rangle = Nm,$$

$$\langle \rho_N^2 \rangle - \langle \rho_N \rangle^2 = Nb^2,$$

pues al ser ξ_i , $i = 1, \dots, N$ independientes

$$\langle \xi_i \xi_j \rangle = \langle \xi_i \rangle \langle \xi_j \rangle \quad i \neq j.$$

Tomemos ahora una variable aleatoria normal (o Gaussiana) γ , con $a = Nm$ y $\sigma^2 = Nb^2$. El teorema central del límite dice que cualquiera que sea el intervalo

(a', b') se tiene que para valores grandes de N

$$P\{a' < \rho_N < b'\} \simeq \int_{a'}^{b'} dx P_\gamma(x),$$

donde

$$P_\gamma(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2},$$

$$a \equiv Nm,$$

$$\sigma^2 \equiv Nb^2.$$

El significado de este teorema es muy sencillo: la suma ρ_N de una gran cantidad de variables aleatorias idénticas es aproximadamente Gaussiana ($P_{\rho_N} \simeq P_\gamma$). Es precisamente este teorema el que explica por qué las variables aleatorias normales aparecen con tanta frecuencia en la práctica.

En nuestro caso hemos cogido $N = 12$, y las variables ξ_i , $i = 1, \dots, 12$ distribuidas uniformemente en el intervalo $[0, 1]$. Esto quiere decir que para estas variables

$$\int_0^1 dx p(x) = 1 \quad \Rightarrow p(x) = 1$$

y que

$$\langle \xi \rangle = \int_0^1 dx x p(x) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow m = \frac{1}{2},$$

$$\langle \xi^2 \rangle = \int_0^1 dx x^2 p(x) = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow b^2 = \frac{1}{12}.$$

Por lo tanto la variable aleatoria

$$\rho = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{12}$$

está distribuida normalmente y su media y varianza son

$$a = 6,$$

$$\sigma^2 = 1,$$

respectivamente.

Para pasar de esta variable gaussiana ξ a otra ξ' tal que

$$\langle \xi' \rangle = a, \quad \sigma'_{\xi} = \sigma$$

basta hacer el cambio

$$\xi' = \sigma(\xi - 6) + a.$$

7.8 Condiciones impuestas en la integración numérica

- Para integrar la ecuación (7.1) con el esquema (7.6) hemos empleado las condiciones iniciales

$$\begin{aligned} u_j^0 &= \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(j\Delta x - x_0), \\ u_j^1 &= \tanh \frac{\gamma}{\sqrt{2}}(j\Delta x - v\Delta t - x_0), \end{aligned}$$

ya que lo que nos interesa es la estabilidad del kink (1.10)

- Normalmente se ha tomado

$$\Delta t = 2.5 \times 10^{-2},$$

$$\Delta x = 5.0 \times 10^{-2},$$

aunque también se ha empleado otros intervalos, siempre teniendo en cuenta la relación (7.24).

- El intervalo espacial de integración ha sido $[-20, 20]$ y el intervalo en que actuaba el ruido $[-10, 10]$. Se ha elegido así por varias razones. Como el intervalo del ruido es mucho menor que el espacial, las perturbaciones en forma de radiación que surgían en el borde $[-10, 10]$ no llegaban a influir en la frontera.

El ruido era localizado en el espacio, pero a la vez mucho más extenso que las dimensiones características de la onda (1.10). Estas dimensiones son del orden de $[-1.5, 1.5]$ y se han obtenido de la región donde la anchura de la densidad de energía (1.11a) es apreciable. Esto permite utilizar $L \rightarrow \infty$ en (5.4a) y (5.4b).

- La ecuación se ha integrado temporalmente en $T \in [0, 12.5]$ ó $T \in [0, 20]$. Estos intervalos de tiempo son tres veces o más el tiempo característico de la solución (1.10). Este tiempo se ha estimado como

$$T \sim \frac{2\pi}{\omega_1}$$

siendo $\omega_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}$ el primer valor propio no nulo en el desarrollo perturbativo del Capítulo 2. Se han considerado esos tiempos porque si el kink tenía que sufrir cambios importantes no era descabellado pensar que fuera en esos intervalos.

- La mayor parte de los valores medios se han efectuado sobre $L = 30$ realizaciones.
- Atendiendo a los efectos producidos por los ruidos sobre los solitones, hemos llamado ruidos débiles a aquellos para los que $\sigma \leq 0.1$, y ruidos fuertes al resto.

7.9 Gráficas

- Figura 1. : Representación de la evolución del kink (1.10) para $v = 0.2$.
- Figura 2. : Representación de la densidad de energía T_1 dada en (1.11a) para $v = 0.2$.
- Figura 3. : $P(t) - P(0)$ frente a t para $v = 0.2$
- Figura 4. : $(P^{n+1} - P^n)/P^n$ frente a t cuando no hay perturbación en ϕ^4 y la velocidad inicial del kink es 0.2. Como puede verse esta cantidad es del orden 10^{-11} .
- Figura 5. : $P(t)$ en función de t para el modelo ϕ^4 con disipación y sin ruido ($F = V = 0$); $v = 0.2$, $x_0 = 5$ y $\alpha = 0.1$. El valor exacto es $P(t) = \frac{4\pi v}{3\sqrt{2}} e^{-\alpha t}$, y queda ligeramente por encima del valor numérico. En la gráfica ambos aparecen superpuestos.
- Figura 6. : Simulación del ruido gaussiano. Valores generados con $\sigma = 0.01$, $a = 0$ en (7.39a)-(7.39b). En el eje vertical sólo se ha considerado el intervalo $[-0.03, 0.03]$ por la regla de las tres sigmas:

$$\int_{a-3\sigma}^{a+3\sigma} dx p(x) \simeq 0.9,$$

$$p(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)^2}.$$

- Figura 7. : $\langle v \rangle$ en función de t para el modelo ϕ^4 , en el caso de un ruido aditivo sin disipación. $\sigma = 0.01$, $a = 0$. El valor teórico es $\langle v \rangle = 0$.

- Figura 8. : $\langle v^2 \rangle - \langle v \rangle^2$ en función de t para ϕ^4 , en el caso de un ruido aditivo sin disipación con $\sigma = 0.01$ y $a = 0$. La recta es el valor teórico $9Dt$, donde

$$D = \frac{\sigma^2 \Delta t}{2} = 0.125 \times 10^{-6}.$$

$L = 30$ realizaciones. v ha sido calculada con la definición v_i^n dada en (7.17) y luego promediada. El solitón perturbado tenía velocidad inicial nula y estaba centrado en el origen.

- Figura 9. : $\langle z^2 \rangle - \langle z \rangle^2$ en función de t para un ruido aditivo sin disipación de iguales características que en la figura 8. La parábola superior es el valor teórico $3Dt^3$.
- Figura 10. : X_c dado en (1.15), X_c^2 y v_1 para una sola realización y un ruido aditivo sin disipación para el cual $\sigma = 0.01$, $v = 0.2$
- Figura 11. : Lo mismo que en el caso anterior pero para $u(x, t)$. Como puede verse la forma de la curva no ha cambiado, pero se ha desplazado ligeramente. Las gráficas para $t = 0$ y $t = 5$ han aparecido superpuestas en el dibujo.
- Figura 12. : $u(x, t)$ en el modelo ϕ^4 para distintos t y un ruido fuerte ($\sigma = 25$). Caso aditivo sin disipación. Aquí puede verse que ya para tiempos pequeños la estructura inicial se destruye. $L = 30$.
- Figura 13. : Representación gráfica del valor exacto

$$\langle v^2 \rangle = 1 + b^{1/2} e^b R(b)$$

dada en (6.12) en función del tiempo. $\sigma = 1$.

- 137 -

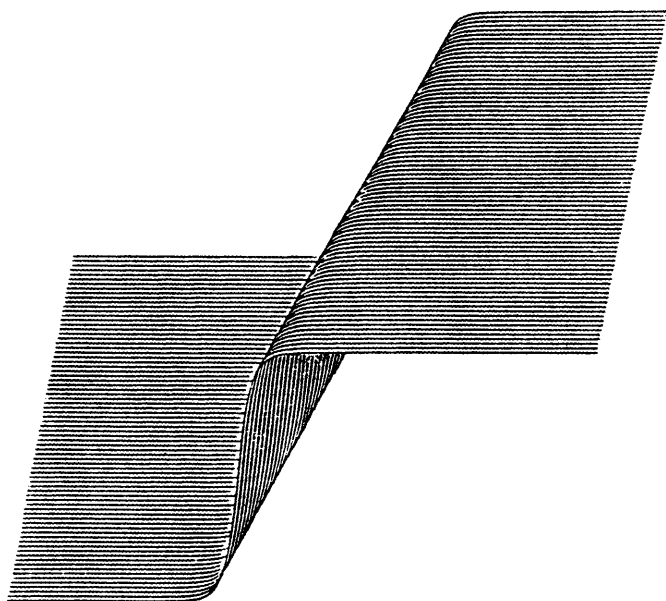


Figura 1

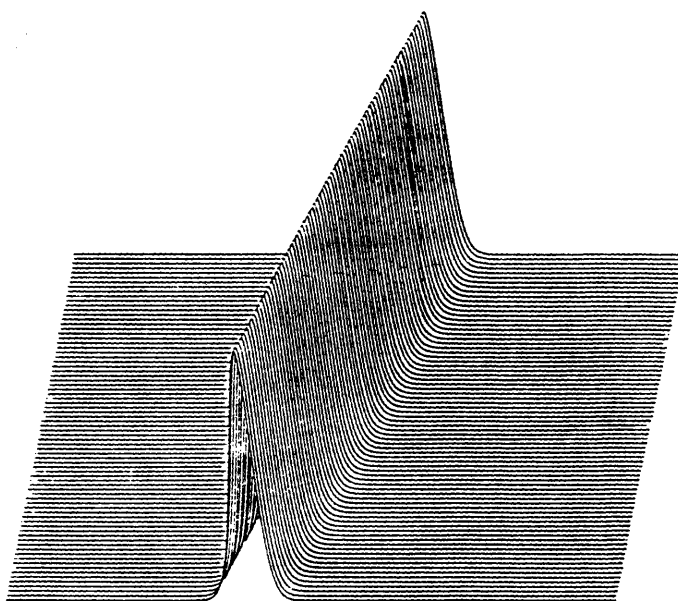
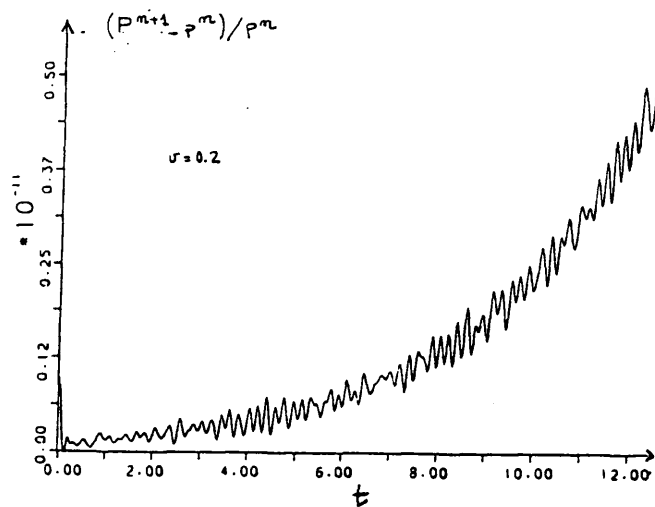
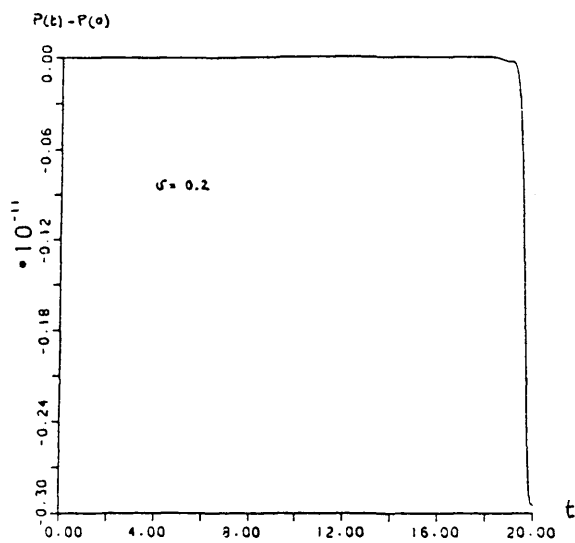


Figura 2



Figuras 3 y 4

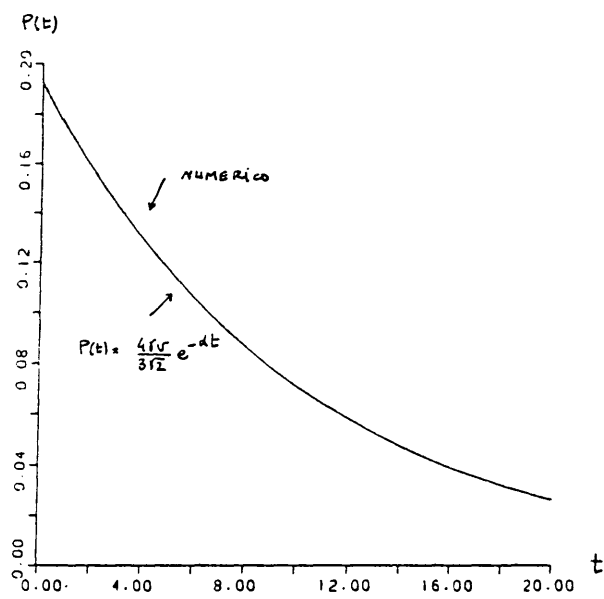
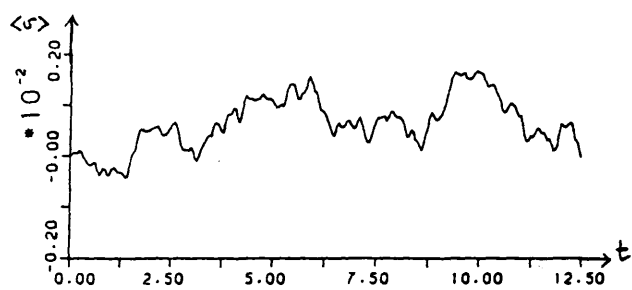
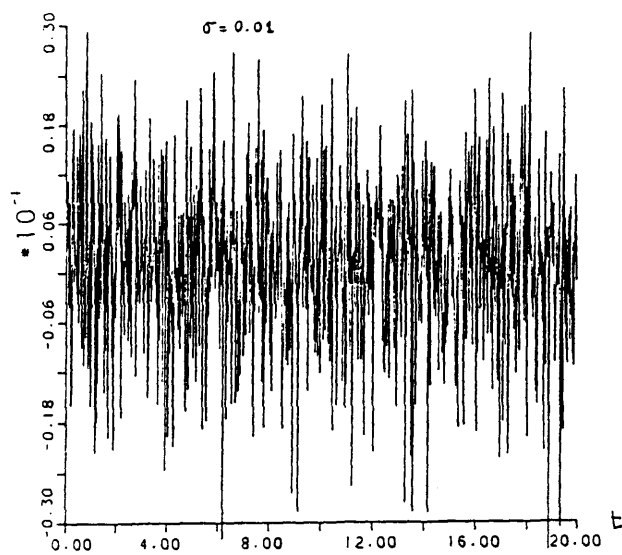
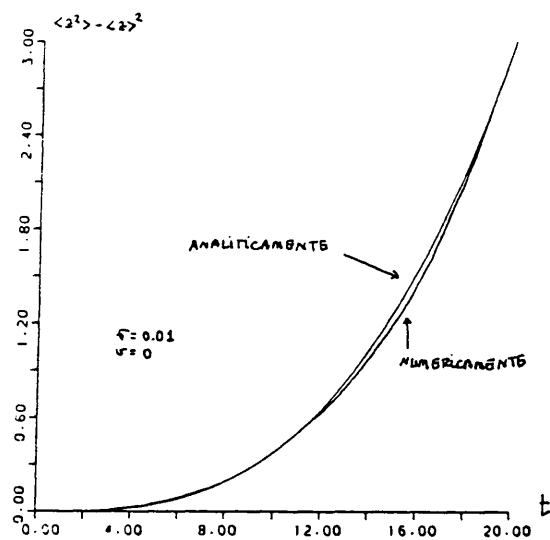
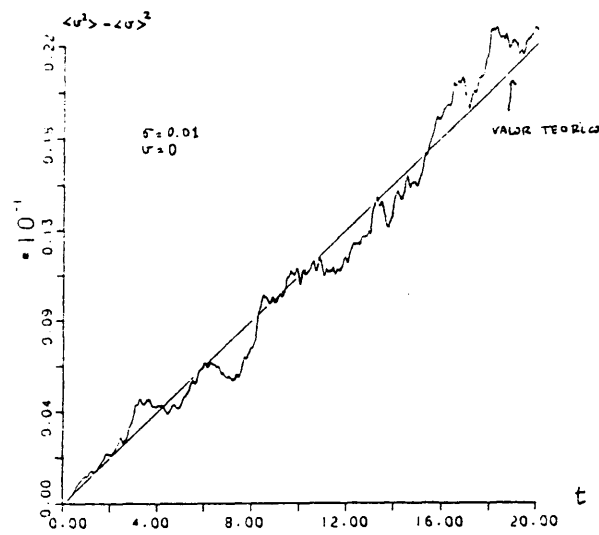


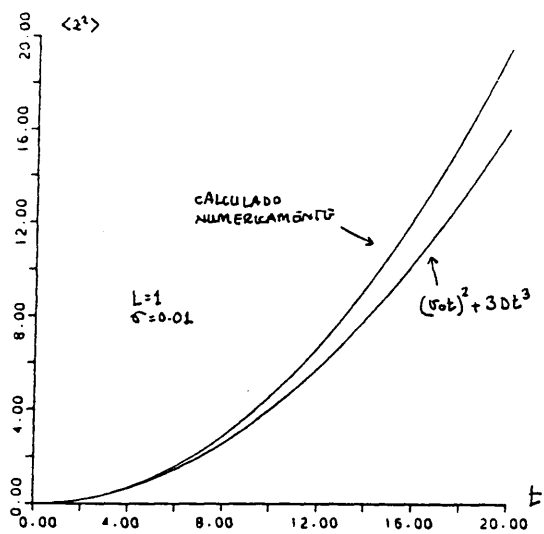
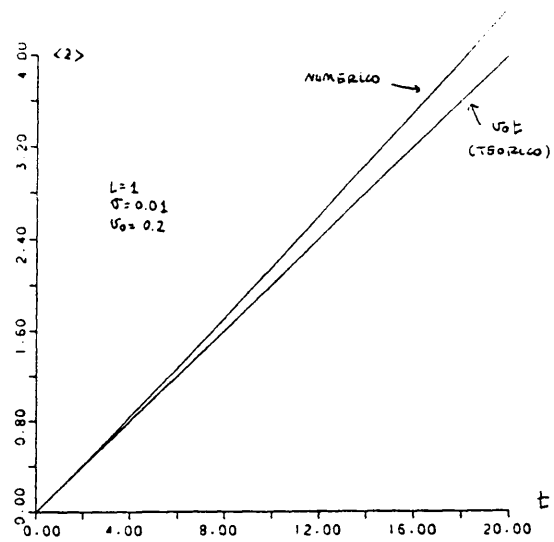
Figura 5



Figuras 6 y 7



Figuras 8 y 9



Figuras 10.1 y 10.2

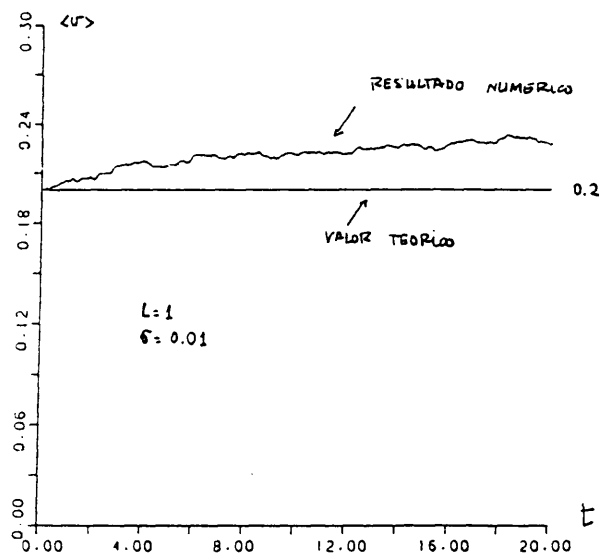


Figura 10.3

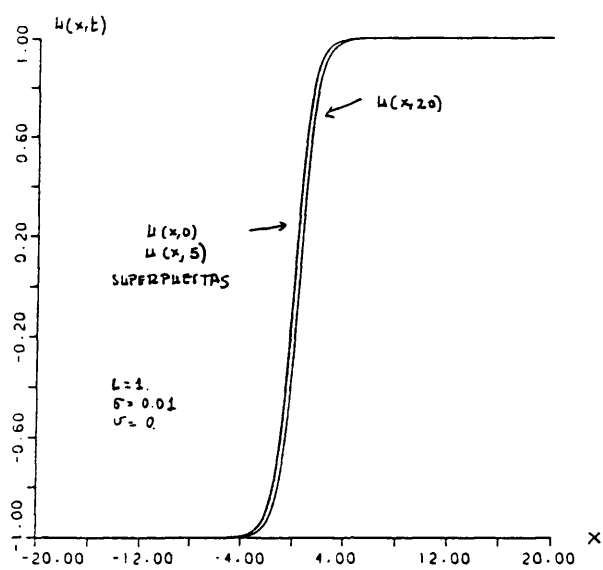
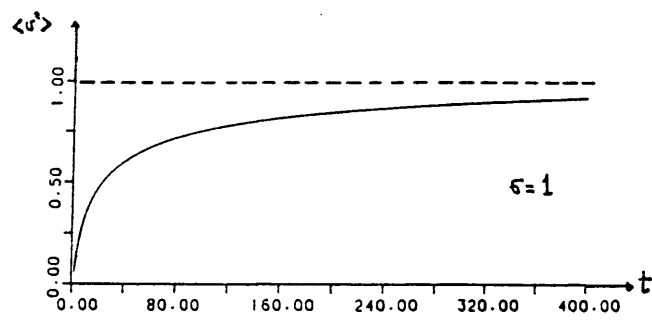
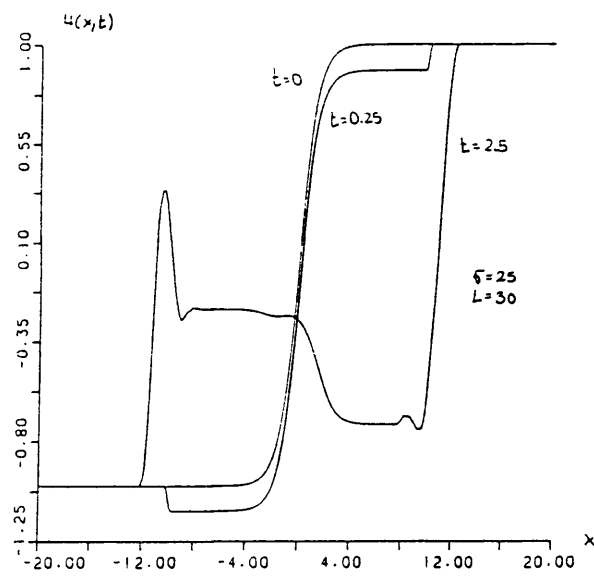


Figura 11



Figuras 12 y 13

CONCLUSIONES

Vamos a recordar ahora las principales aportaciones que se recogen en esta memoria.

Estudiamos los efectos de perturbaciones estocásticas pequeñas sobre los kinks de la ecuación ϕ^4 . Concretamente nos referimos a dos casos: ruido aditivo y ruido multiplicativo con y sin disipación.

Antes de tratar el caso de perturbaciones estocásticas nos restringimos a un cierto tipo de perturbaciones analíticas: dependientes del tiempo, de la función y de sus derivadas.

Si ϕ^4 fuera un sistema integrable, aplicándole el método de IST obtendríamos la forma explícita de las correcciones a la onda inicial y la ecuación diferencial de sus parámetros. Pero ϕ^4 no es integrable. En el Capítulo 1, aplicando la conjetura de Ablowitz, Ramani y Segur, probamos que ϕ^4 no es integrable porque no satisface la propiedad de Painlevé, y que no es posible encontrar transformaciones Bäcklund en este formalismo. Hacemos la comparación con la ecuación de Sine-Gordon, comprobando que satisface dicha propiedad y dando explícitamente la expresión de sus transformaciones Bäcklund.

Ante la imposibilidad de emplear IST, en el Capítulo 3 deducimos las ecuaciones de variación de los parámetros del kink, que ahora ya no tienen por qué ser constantes como en el caso inicial, mediante leyes de conservación. En este capítulo señalamos

que el uso de estas leyes debe hacerse cuidadosamente, pues hay casos en los que dan lugar a ecuaciones contradictorias entre sí. También mostramos que hay una variable (el momento de la onda), en términos de la cual es más sencillo encontrar soluciones a las ecuaciones de variación.

En el Capítulo 4 calculamos las correcciones a la solución casi estacionaria en primer y segundo orden de perturbaciones, para dos casos diferentes, uno de ellos disipativo. Los resultados obtenidos, son:

- i) que las correcciones mencionadas son soluciones de la ecuación de Schrödinger con un potencial de Hylleraas. Esta ecuación se resuelve exactamente en el Capítulo 2 determinando sus estados ligados y de colisión para un potencial de Hylleraas generalizado, y se hace la particularización al caso

$$V(x) = 2 - 3 \cosh^{-2}(x/\sqrt{2}).$$

- ii) que las ecuaciones de variación de los parámetros que ya habíamos obtenido anteriormente con leyes de conservación, son precisamente las ecuaciones necesarias para eliminar los términos seculares del desarrollo perturbativo. Estos términos seculares hay que eliminarlos porque de lo contrario dan lugar a correcciones a la onda inicial no- acotadas para determinados tiempos.
- iii) que todas las correcciones de primero, segundo orden, etc., dependen de un parámetro que se determina con las condiciones iniciales impuestas a la solución, pero que ese parámetro nunca interviene en las condiciones de compatibilidad.
- iv) el rango de tiempos en los que es válido el desarrollo mencionado para cada una de las perturbaciones consideradas.

Las soluciones analíticas obtenidas con el método perturbativo son de gran utilidad cuando las perturbaciones originales se sustituyen por perturbaciones estocásticas con unas propiedades estadísticas dadas. En muchos casos, tomando valores medios en estas soluciones, se pueden encontrar las correcciones estocásticas a la solución inicial.

En el Capítulo 5 se obtienen las ecuaciones de variación de los parámetros de la solución no-perturbada en el caso de perturbaciones estocásticas, localizadas en el espacio y dependientes del tiempo, así como las soluciones explícitas para los valores medios de los parámetros cuando el movimiento de la onda es no-relativista. Este procedimiento se lleva a cabo de dos maneras: resolviendo las ecuaciones de Langevin y tomando valores medios de esas soluciones a continuación, y hallando las soluciones a través de la ecuación de Fokker-Planck. Ambos resultados coinciden.

En el valor cuadrático medio de la velocidad y del centro de energías de la onda perturbada, las correcciones debidas a las perturbaciones estocásticas son de segundo orden para tiempos pequeños.

En el Capítulo 6 se determina exactamente $\langle v^2 \rangle$, $\langle v^4 \rangle$ y $\langle v^6 \rangle$ en función del tiempo para kinks relativistas, así como la densidad de probabilidad de velocidades asociada.

En cuanto a los resultados numéricos se ha observado que concuerdan con los teóricos para ruidos débiles y tiempos cortos. Para ruidos grandes la estructura de la onda inicial se destruye totalmente.

APENDICE A

1. Obtención del factor (2.27)

Los estados de colisión (2.25) están dados por

$$\Psi_{\text{par}}^{(k)} = A(k) \left\{ e^{ikx} f_1^{(k)}(x) \pm e^{-ikx} f_2^{(k)}(x) \right\},$$

donde

$$f_1^{(k)}(x) \equiv 3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2), \quad (\text{A.1.1})$$

$$f_2^{(k)}(x) \equiv 3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} + 3\sqrt{2} ik \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} - (1 + 2k^2). \quad (\text{A.1.2})$$

Lo que queremos calcular es la integral

$$I_{\text{par}} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_{\text{par}}^{(k)*}(x) \Psi_{\text{par}}^{(k')}(x),$$

donde

$$f_1^{(k)}(-x) = f_2^{(k)}(x) \quad \forall k, x \text{ reales},$$

y por lo tanto

$$I_{\text{par}} = 2A^*(k)A(k') \int_{-\infty}^{+\infty} dx \left[e^{i(k-k')x} f_2^{(k)*}(x) f_2^{(k')}(x) \pm e^{i(k+k')x} f_2^{(k)*}(x) f_1^{(k')}(x) \right].$$

Con la relación

$$f_1^{(-k)}(x) = f_2^{(k)}(x), \quad \forall k, x$$

y las definiciones

$$I_{2p}(k) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \tanh^{2p}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

$$I_{2p+1}(k) \equiv \frac{1}{i} \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \tanh^{2p+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad p = 0, 1, 2, \dots$$

o equivalentemente

$$I_{2p}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cos kx \tanh^{2p}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (\text{A.2.1})$$

$$I_{2p+1}(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \sin kx \tanh^{2p+1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right), \quad (\text{A.2.2})$$

se llega a que

$$I_{\text{par impar}} = 2A^*(k)A(k') \left\{ 9I_4(k-k') + 9\sqrt{2}(k-k')I_3(k-k') + \right. \\ \left. + [-3(1+2k'^2) + 18kk' - 3(1+2k^2)] I_2(k-k') + \right. \\ \left. + [-3\sqrt{2}k(1+2k'^2) + 3\sqrt{2}k'(1+2k^2)] I_1(k-k') + \right. \\ \left. + (1+2k^2)(1+2k'^2)I_0(k-k') \pm \right. \\ \left. \pm \{k \rightarrow k'\} \right\},$$

donde $\{k \rightarrow k'\}$ indica que hay que sumar algo igual a todo el término anterior pero cambiando $k \rightarrow k'$. Estas integrales son iguales a

$$I_0(k) = 2\pi\delta(k) \quad (\text{A.3.1}),$$

$$I_1(k) = 2C(k) + \frac{T(k)}{\sqrt{2}k}, \quad (\text{A.3.2})$$

$$I_2(k) = 2\pi\delta(k) - T(k), \quad (\text{A.3.3})$$

$$I_3(k) = 2C(k) + \left(\frac{1-k^2}{\sqrt{2}k}\right)T(k), \quad (\text{A.3.4})$$

$$I_4(k) = 2\pi\delta(k) - \left(\frac{4-k^2}{3}\right)T(k). \quad (\text{A.3.5})$$

donde

$$C(k) \equiv -\frac{1}{k} + VP \frac{1}{x},$$

$$T(k) \equiv \frac{2\pi k}{\sinh(\frac{\pi k}{\sqrt{2}})},$$

con $VP \frac{1}{x}$ la distribución valor principal de $\frac{1}{x}$. Introduciendo (A.3.1)-(A.3.5) en la última expresión para $I_{\text{par}}^{\text{par}}$, se llega a que

$$I_{\text{par}}^{\text{par}} = 8\pi(k^2 + 2)(2k^2 + 1) \left[|A(k)|^2 \delta(k - k') \pm A^*(k)A(-k) \delta(k + k') \right]. \quad (\text{A.4})$$

Eligiendo $A(k)$ como

$$A(k) = \left[\frac{1}{16\pi(k^2 + 2)(2k^2 + 1)} \right]^{1/2}$$

se satisface la condición de normalización (2.26). Es oportuno hacer aquí algunos comentarios:

i) En (A.4) también aparecen términos que van con $C(k - k')$, pero como es bien conocido, la distribución $VP \frac{1}{x}$ es exactamente igual a la función $\frac{1}{x}$ siempre y cuando $k \neq 0$, pero no cuando $k = 0$ [24]. En nuestro caso $C(k - k')$ aparecía multiplicado por una expresión que se anulaba idénticamente cuando $k = k'$, por lo que esos términos no aparecen en (A.4).

ii) Cálculo de I_0, I_1, I_2, I_3 e I_4 .

Integrando por partes en (A.2.1) y (A.2.2) y teniendo en cuenta las definiciones

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\sin \lambda x}{\pi x} = \delta(x),$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} = \frac{1}{x} - VP \frac{1}{x},$$

se llega fácilmente a

$$I_{2p}(k) = 2\pi\delta(k) + \frac{2p}{\sqrt{2}k}(I_{2p+1} - I_{2p-1}),$$

$$I_{2p+1}(k) = 2\left(-\frac{1}{k} + VP\frac{1}{k}\right) - \frac{2p+1}{\sqrt{2}k}(I_{2p+2} - I_{2p}),$$

que indica que son necesarias dos integrales colocadas adecuadamente para conocer una dada. Nosotros sabemos que

$$I_0(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} = 2\pi\delta(k),$$

$$I_2(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{ikx} \left(1 - \frac{1}{\cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}}}\right)$$

$$= 2\pi\delta(k) - \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{ikx}}{\cosh^2 \frac{x}{\sqrt{2}}}$$

$$= 2\pi\delta(k) - T(k),$$

donde $T(k)$ está dada por

$$T(k) = \frac{2\pi k}{\sinh(\frac{\pi k}{\sqrt{2}})}.$$

La integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{imx}}{\cosh^2 x} = \frac{\pi m}{\sinh(\frac{m\pi}{2})}$$

se obtiene mediante el teorema de los residuos. Una vez conocidas I_0 e I_2 ya se pueden calcular I_1 , I_3 e I_4 . El resultado es (A.3).

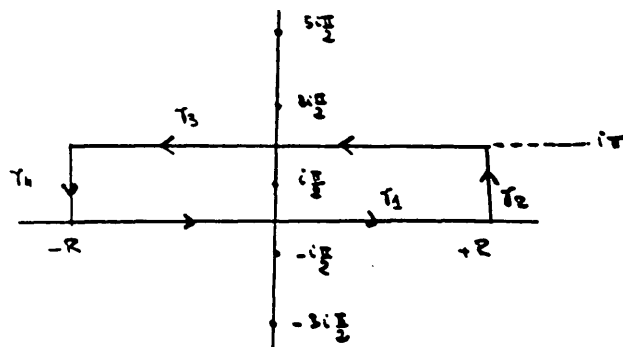
iii) A título de ejemplo, y debido al hecho de que este tipo de integrales se nos van a presentar frecuentemente, vamos a calcular

$$I \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{e^{imx}}{\cosh^2 x}.$$

Las soluciones de $\cosh z = 0$ para z un número complejo son $z_0 = i(2n+1)\frac{\pi}{2}$ con $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ lo que indica que

$$f(z) = \frac{e^{imz}}{\cosh^2 z}.$$

tiene infinitos puntos singulares en el eje imaginario. Para hallar I tomaremos el arco de integración de la figura



y después el límite $R \rightarrow +\infty$. Por el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma} dz \frac{e^{imz}}{\cosh^2 z} = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{imz}}{\cosh^2 z}, i\frac{\pi}{2}\right),$$

donde el arco γ está dado por

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4.$$

En el arco γ_1 , $z = x$ por lo que

$$\int_{\gamma_1} dz \frac{e^{ims}}{\cosh^2 z} = \int_{-R}^{+R} dx \frac{e^{ims}}{\cosh^2 x},$$

en γ_3 , $z = x + i\pi$ y

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_3} dz \frac{e^{ims}}{\cosh^2 z} &= \int_{+R}^{-R} dx \frac{e^{im(x+i\pi)}}{\cosh^2(x+i\pi)} \\ &= -e^{-m\pi} \int_{-R}^{+R} dx \frac{e^{ims}}{\cosh^2 x}, \end{aligned}$$

en γ_2 , $z = R + iy$ y

$$\int_{\gamma_2} dz \frac{e^{ims}}{\cosh^2 z} = i \int_0^\pi dy \frac{e^{im(R+iy)}}{\cosh^2(R+iy)},$$

y en γ_4 , $z = -R + iy$

$$\int_{\gamma_4} dz \frac{e^{ims}}{\cosh^2 z} = i \int_\pi^0 dy \frac{e^{im(-R+iy)}}{\cosh^2(-R+iy)}.$$

Vamos a ver ahora que las dos últimas integrales son nulas cuando $R \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |\cosh(R+iy)| &= \frac{1}{2} |e^{R+iy} + e^{-R-iy}| \\ &\geq \frac{1}{2} (|e^R| - |e^{-R}|) \\ &= \frac{1}{2} (e^R - e^{-R}), \end{aligned}$$

utilizando esta desigualdad

$$\left| \int_0^\pi dy \frac{e^{im(R+iy)}}{\cosh^2(R+iy)} \right| \leq \frac{4}{(e^R - e^{-R})^2} \int_0^\pi dy e^{-my} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

pues $\int_0^\pi dy e^{-my}$ es un número finito. De igual forma se hace con la integral a lo largo de γ_4 . De esta manera, cuando $R \rightarrow +\infty$,

$$I = \frac{2\pi i}{1 - e^{-m\pi}} \operatorname{Res}\left(\frac{e^{imz}}{\cosh^2 z}, i\frac{\pi}{2}\right).$$

Ahora sólo falta calcular este residuo. Haciendo el cambio $u = z - i\frac{\pi}{2}$, $f(z)$ cambia a $g(u)$ con $g(u)$ dado por

$$g(u) \equiv \frac{e^{im(u+i\frac{\pi}{2})}}{\cosh^2(u+i\frac{\pi}{2})},$$

es decir,

$$g(u) = -\frac{e^{-\frac{m\pi}{2}} e^{imu}}{\sinh^2 u}.$$

Mediante los desarrollos en serie

$$\begin{aligned} g(u) &= -\frac{e^{-\frac{m\pi}{2}} e^{imu}}{u^2} \left(1 + \frac{u^2}{3!} + \frac{u^4}{5!} + \frac{u^6}{7!} + \dots\right)^{-2} \\ &= -\frac{e^{-\frac{m\pi}{2}}}{u^2} \left(1 + imu + \frac{(imu)^2}{2!} + \dots\right) \left(1 - \frac{u^2}{3} + \dots\right) \\ &= -\frac{e^{-\frac{m\pi}{2}}}{u^2} (1 + imu + \dots), \end{aligned}$$

se calcula

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{imz}}{\cosh^2 z}, i\frac{\pi}{2}\right) = -ime^{-\frac{m\pi}{2}}$$

resultando finalmente

$$I = \frac{\pi m}{\sinh(\frac{m\pi}{2})}.$$

2. Obtención de la igualdad (2.28)

Teniendo en cuenta las definiciones (2.21), (2.22) y (2.25) se comprueba que las integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \Psi_n^*(x) \Psi_\lambda^{(k)}(x)$$

son nulas cuando $n = 0, 1$ y $\lambda = \text{par, impar}$. Para verlo basta utilizar los resultados

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^4 x} = \frac{\pi m(2 - m^2)}{6 \sinh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{\sinh x}{\cosh^3 x} = \frac{i\pi m^2}{2 \sinh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.2)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{1}{\cosh^2 x} = \frac{\pi m}{\sinh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.3)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{i\pi m}{\cosh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.4)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{\sinh^2 x}{\cosh^3 x} = \frac{\pi(1 - m^2)}{2 \cosh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.5)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{imx} \frac{\sinh^3 x}{\cosh^4 x} = \frac{i\pi m(5 - m^2)}{6 \cosh(\frac{m\pi}{2})}, \quad (A.5.6)$$

calculadas todas estas integrales por el teorema de los residuos y consideraciones de simetría.

3. Obtención de la relación de cierre (2.29)

De (2.25) y de las definiciones (A.1.1) y (A.1.2) se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\Psi_{par}^{(k)*}(x) \Psi_{par}^{(k)}(x') + \Psi_{impar}^{(k)*}(x) \Psi_{impar}^{(k)}(x') \right] = \\ = 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dk |A(k)|^2 \left[e^{-ik(z-z')} f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x') + e^{ik(z-z')} f_2^{(k)*}(x) f_2^{(k)}(x') \right]. \end{aligned} \quad (A.6)$$

Vamos a calcular ésta última integral. De (2.27) se concluye que

$$A(k) = A(-k),$$

que junto a la igualdad

$$f_1^{(-k)}(x) = f_2^{(k)}(x) \quad \forall k, x \text{ reales},$$

nos permite escribir

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk 2 |A(k)|^2 \left[e^{-ik(z-z')} f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x') + e^{ik(z-z')} f_2^{(k)*}(x) f_2^{(k)}(x') \right] = \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} dk 4 |A(k)|^2 e^{-ik(z-z')} f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x'). \end{aligned} \quad (A.7)$$

Empleando (2.27) y (A.1.1), $|A(k)|^2 f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x')$ se escribiría como

$$|A(k)|^2 f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x') = \frac{1}{16\pi} \left[\frac{a_4}{2} + \frac{a_3 k^3 + (a_2 - \frac{5}{2} a_4) k^2 + a_1 k + (a_0 - a_4)}{(k^2 + 2)(2k^2 + 1)} \right], \quad (A.8)$$

donde se han introducido las funciones $a_i, i = 0, \dots, 4$ de x, x' definidas por

$$a_0(x, x') \equiv (3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 1)(3 \tanh^2 \frac{x'}{\sqrt{2}} - 1), \quad (A.9.1)$$

$$a_1(x, x') \equiv -(3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 1) 3\sqrt{2} i \tanh \frac{x'}{\sqrt{2}} + (3 \tanh^2 \frac{x'}{\sqrt{2}} - 1) 3\sqrt{2} i \tanh \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.9.2})$$

$$a_2(x, x') \equiv -2(3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} - 1) - 2(3 \tanh^2 \frac{x'}{\sqrt{2}} - 1) + 18 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x'}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.9.3})$$

$$a_3(x, x') \equiv -6\sqrt{2} i \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} + 6\sqrt{2} i \tanh \frac{x'}{\sqrt{2}}, \quad (\text{A.9.4})$$

$$a_4(x, x') \equiv 4. \quad (\text{A.9.5})$$

Con la expresión (A.8), la integral (A.7) se reduce al cálculo de las integrales

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{e^{-ikx} k^n}{(k^2 + 2)(2k^2 + 1)}, \quad n = 0, 1, 2, 3. \quad (\text{A.10})$$

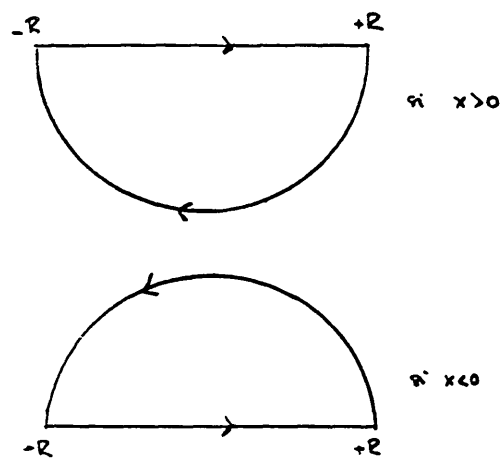
Este cálculo se hace mediante el teorema de los residuos, tomando los ciclos de integración de la figura con $R \rightarrow +\infty$ en ambos casos. El resultado es

$$J_n(x) = \mp \frac{i}{48} \left[e^{-|x|/\sqrt{2}} \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \right)^{n-1} - e^{-\sqrt{2}|x|} (-\sqrt{2}i)^{n-1} \right], \quad (\text{A.11})$$

donde la primera expresión es para $x > 0$ y la segunda para $x < 0$. Con este resultado se llega, mediante cálculos largos pero elementales, a que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} dk 4 |A(k)|^2 e^{-ik(x-x')} f_1^{(k)*}(x) f_1^{(k)}(x') &= \delta(x-x') \\ &+ \frac{1}{12} e^{-|x-x'|/\sqrt{2}} \left[\pm \frac{ia_3}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(a_2 - \frac{5}{2} a_4 \right) \mp ia_1 + \sqrt{2}(a_0 - a_4) \right] \\ &- \frac{1}{12} e^{-\sqrt{2}|x-x'|} \left[\pm i2a_3 - \sqrt{2} \left(a_2 - \frac{5}{2} a_4 \right) \mp ia_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_0 - a_4) \right] \\ &\equiv \delta(x-x') - \Psi_0^*(x) \Psi_0(x') - \Psi_1^*(x) \Psi_1(x'), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

lo que prueba precisamente (2.29).



APENDICE B

1. Desarrollo de F_2 dado por (4.28)

Teniendo en cuenta Q_0 y Q_1 dados por (4.2) y (4.24) junto con la definición $x = \gamma(\theta - \theta_0)$, F_2 que venía definido en (4.28) como

$$F_2 \equiv -3Q_0Q_1^2 + v_T Q_{1\theta} + 2v Q_{1\theta T} - bQ_1 - Q_{0TT},$$

puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} F_2 = & C_1^2 \left(-3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + C_1 \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(-6 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - \right. \\ & \left. - 4 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + C_1 b \left(3 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} + 3 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \gamma^4 v^2 \theta_{0,T}^2 \left(-3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} + 4 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \right. \\ & \left. - 4 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + \gamma^2 \theta_{0,T}^2 \left(\tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\ & + b^2 \left(-\frac{3}{4} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{3}{4} \tanh^3 \frac{x}{\sqrt{2}} - \right. \\ & \left. - \frac{3}{2} \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \gamma^2 v \theta_{0,T} b \left(3 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} + 5 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \right. \\
 & \left. - 3 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\
 & \frac{\gamma^3}{\sqrt{2}} v^2 \theta_{0,TT} \left(2 \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) + \\
 & \frac{\gamma}{\sqrt{2}} \theta_{0,TT} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}}. \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

donde ya se ha introducido $v_T = 0$.

2. Obtención de la ecuación (4.30)

La condición de compatibilidad (4.29) puede escribirse como la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} F_2(x) = 0$$

donde $F_2(x)$ viene dado por (B.1). Los únicos términos que intervienen en dicha integral son

$$\begin{aligned}
 C_1 \gamma^2 v \theta_{0,T} : \int_0^{+\infty} dx \left(-3 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-6} \frac{x}{\sqrt{2}} - \right. \\
 \left. - 2 \tanh^3 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} + \cosh^{-6} \frac{x}{\sqrt{2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$C_1 b : \int_0^{+\infty} dx \left(3 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-6} \frac{x}{\sqrt{2}} + 3 \tanh^3 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\gamma^3 v^2 \theta_{0,TT} : \int_0^{+\infty} dx \left(\cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - 2 \frac{x}{\sqrt{2}} \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right),$$

$$\frac{\gamma}{2} \theta_{0,TT} : \int_0^{+\infty} dx \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}},$$

siendo las dos primeras nulas como es fácil de comprobar (aquí se ve que C_1 no interviene en la condición de compatibilidad) y las otras dos las que dan lugar al resultado

$$\theta_{0,TT} = 0.$$

3. Expresión final de F_2 dada por (4.48)

Una vez sustituidas Q_0 y Q_1 dadas por (4.42) y (4.45) respectivamente, en la expresión (4.48) junto con las condiciones de compatibilidad (4.43) y (4.49), la forma final de F_2 es la siguiente

$$F_2 = C_1^2 \left(-3 \tanh \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$C_1 \frac{\alpha}{\sqrt{2}} \gamma v^3 \left(-6 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right)^2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - 8 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \tanh^3 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + \right.$$

$$\left. 4 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$C_1 \gamma^2 v \theta_{0,T} \left(-6 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \tanh \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} - 4 \tanh^2 \frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} + 2 \cosh^{-4} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) -$$

$$\alpha^2 \gamma^2 v^2 \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \cosh^{-2} \frac{x}{\sqrt{2}} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha^2\gamma^2v^4\left(8\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}-4\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+ \\
& +\alpha^2\gamma^2v^6\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^4\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}}+\right. \\
& +\left.\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3(-4\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}+6\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}})+3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+ \\
& +\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\gamma^3v^2\theta_{0,T}\left(12\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}-3\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+ \\
& +\frac{\alpha}{\sqrt{2}}\gamma^3v^4\theta_{0,T}\left(-6\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^3\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}}+\right. \\
& +\left.\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2(-12\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}+18\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}})+\right. \\
& +\left.6\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+ \\
& +\gamma^4\theta_{0,T}^2\left(\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right)+ \\
& +\gamma^4\theta_{0,T}^2v^2\left(-3\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}}+\right. \\
& +\left.\frac{x}{\sqrt{2}}(-4\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}+6\cosh^{-4}\frac{x}{\sqrt{2}})+3\tanh\frac{x}{\sqrt{2}}\cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}\right). \tag{B.2}
\end{aligned}$$

Se puede comprobar que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \cosh^{-2}\frac{x}{\sqrt{2}}F_2(x) \equiv 0$$

sin más que utilizar las integrales

$$\int_0^{+\infty} dx \tanh x \cosh^{-6} x = \frac{4}{45}, \tag{B.3.1}$$

$$\int_0^{+\infty} dx \tanh^2 x \cosh^{-4} x = \frac{2}{15}, \tag{B.3.2}$$

$$\int_0^{+\infty} dx \cosh^{-6} x = \frac{8}{15}, \tag{B.3.3}$$

$$\int_0^{+\infty} dx x^3 \tanh x \cosh^{-6} x = -\frac{1}{6} + \frac{\pi^2}{45}, \tag{B.3.4}$$

$$\int_0^{+\infty} dx x^2 \cosh^{-4} x = -\frac{1}{3} + \frac{\pi^2}{18}, \quad (B.3.5)$$

$$\int_0^{+\infty} dx x^2 \cosh^{-6} x = -\frac{1}{3} + \frac{2\pi^2}{45}, \quad (B.3.6)$$

$$\int_0^{+\infty} dx x \tanh x \cosh^{-4} x = \frac{1}{6}, \quad (B.3.7)$$

$$\int_0^{+\infty} dx \cosh^{-4} x = \frac{2}{3}, \quad (B.3.8)$$

donde (B.3.4), (B.3.5) y (B.3.6) han sido calculadas mediante el teorema de los residuos.

4. Comportamiento asintótico de $G(x) \equiv \int dx \cosh^4 x \int^x ds s \cosh^{-4} s$

i) Cuando $x \gg$

$$\begin{aligned} G(x) &\equiv \int dx \cosh^4 x \int^x ds s \cosh^{-4} s \sim -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + \\ &+ \sum_{\substack{n,p=0 \\ n+p=1}}^{\infty} \binom{4}{p} \binom{-4}{n} \frac{e^{-2(p+n)x}}{4(p+n)(n+2)} \left[x + \frac{p+2n+2}{2(p+n)(n+2)} \right] = \\ &= -\frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + \left(\frac{x}{6} + \frac{11}{72} \right) e^{-2x} + \dots \end{aligned} \quad (B.4.1)$$

Este desarrollo asintótico puede obtenerse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \cosh^{-4} &\equiv 16e^{-4x}(1 + e^{-2x})^{-4} \\ &\sim 16e^{-4x} \sum_0^{\infty} \binom{-4}{n} e^{-2nx}, \text{ cuando } x \gg \end{aligned}$$

donde se ha desarrollado $(1 + e^{-2x})^{-4}$ en serie de potencias de e^{-2x} , y por lo tanto

$$\int dx x \cosh^{-4} x = -16 \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{e^{-(2n+4)x}}{2n+4} \left(x + \frac{1}{2n+4} \right),$$

con lo que

$$\begin{aligned} \cosh^4 x \int^x ds s \cosh^{-4} s &= -(e^{4x} + 4e^{2x} + 6 + 4e^{-2x} + e^{-4x}) \times \\ &\times \sum_0^{\infty} \binom{-4}{n} \frac{e^{-(2n+4)x}}{2n+4} \left(x + \frac{1}{2n+4} \right) = \\ &= - \sum_{p,n=0}^{\infty} \binom{4}{p} \binom{-4}{n} \frac{e^{-(2n+4)x}}{2n+4} \left(x + \frac{1}{2n+4} \right) = \\ &= -\frac{x}{4} - \frac{1}{16} - \left(\frac{x}{3} + \frac{5}{36} \right) e^{-2x} - \left(\frac{25}{12}x + \frac{121}{288} \right) e^{-4x} - \frac{e^{-6x}}{120} + \dots, \end{aligned}$$

de donde se obtiene (B.4.1) con una nueva integración. Nótese en esta expresión que $\binom{4}{p} \equiv 0$ para $p > 4$.

ii) Cuando $x \ll$

Con argumentos análogos se puede obtener que

$$G(x) \sim \frac{x^2}{8} - \frac{x}{16} + \left(\frac{x}{6} - \frac{11}{72} \right) e^{2x} + \dots \quad (\text{B.4.2})$$

APENDICE C

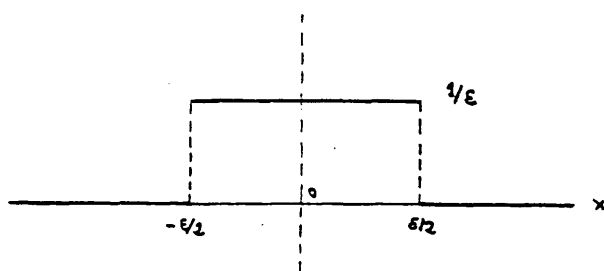
1. Cálculo de $I = \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} \delta(s' - s)$

Para calcular esta integral y todas las de este apéndice vamos a utilizar la definición

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \delta_{\epsilon}(x)$$

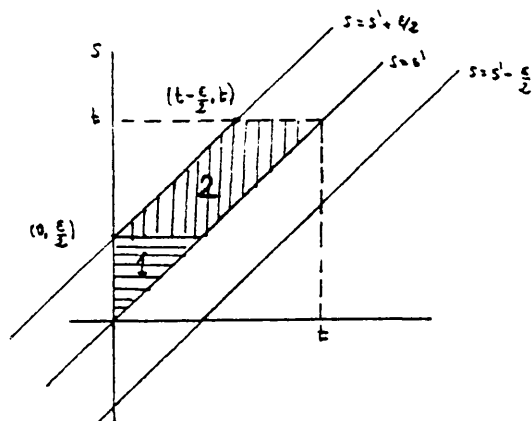
donde

$$\delta_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} & x \in [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}], \\ 0 & x \notin [-\frac{\epsilon}{2}, \frac{\epsilon}{2}], \end{cases}$$



$$\begin{aligned} I &\equiv \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} \delta(s' - s) = \\ &= \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} \delta_{\epsilon}(s' - s), \end{aligned}$$

y por la definición de $\delta_\epsilon(x)$ sólo contribuye a la integral el dominio de la figura.



Así

$$I = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (I_1 + I_2)$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon/2} ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} = \frac{1}{\alpha\epsilon} \left[\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{\alpha} (e^{-\alpha\epsilon/2} - 1) \right] \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0$$

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon/2}^t ds \int_{s-\epsilon/2}^s ds' e^{\alpha(s'-s)} = \frac{1}{\alpha\epsilon} (1 - e^{-\alpha\epsilon/2}) (t - \frac{\epsilon}{2}) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \frac{t}{2}$$

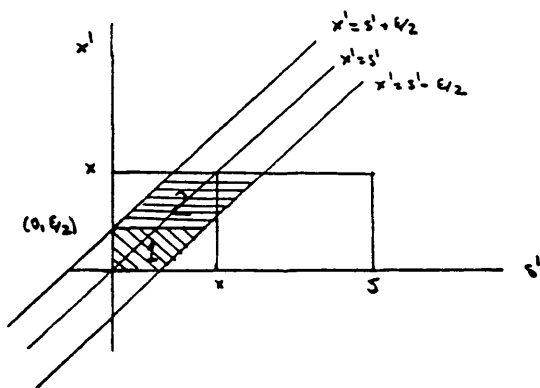
y por lo tanto

$$\int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} \delta(s' - s) = \frac{t}{2} \quad (C.1)$$

2. Cálculo de $I = \int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'+x')} \delta(s' - x')$

Pueden darse dos casos:

a) $\min(s, x) = x$



$$I = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (I_1 + I_2)$$

con

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon/2} dx' \int_0^{x'+\epsilon/2} ds' e^{\alpha(s'+x')} = \frac{1}{\alpha^2 \epsilon} \left[\frac{e^{\alpha \epsilon/2}}{2} (e^{\alpha \epsilon} - 1) + (1 - e^{\alpha \epsilon/2}) \right] \Big|_{\epsilon \downarrow 0} 0$$

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon/2}^x dx' \int_{x'-\epsilon/2}^{x'+\epsilon/2} ds' e^{\alpha(s'+x')} = \frac{1}{\alpha^2 \epsilon} \left(\frac{e^{\alpha \epsilon/2} - e^{-\alpha \epsilon/2}}{2} \right) (e^{2\alpha x} - e^{\alpha \epsilon})$$

$$\Big|_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha x} - 1)$$

y por consiguiente

$$I = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha x} - 1).$$

b) $\min(s, x) = s$,

es igual que en el caso anterior, pero cambiando $x \rightarrow s$ en el resultado final

$$I = \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha s} - 1).$$

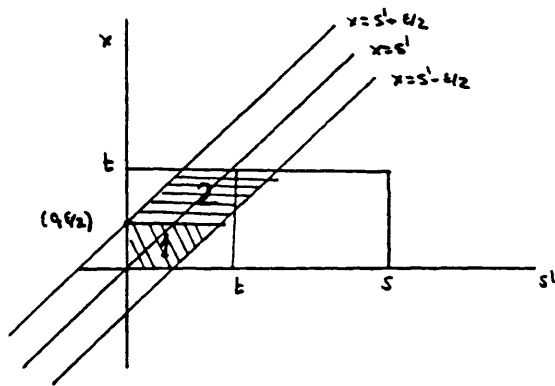
Así se llega a que

$$\int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'+x')} \delta(s' - x') = \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha x} - 1) & \min(s, x) = x, \\ \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha s} - 1) & \min(s, x) = s. \end{cases} \quad (\text{C.2})$$

3. Cálculo de $I = \int_0^t dx \int_0^x ds' e^{-\alpha(s'-x)} \delta(s' - x)$

Aquí también pueden darse dos casos:

a) $\min(t, s) = t$



$$I = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (I_1 + I_2)$$

donde

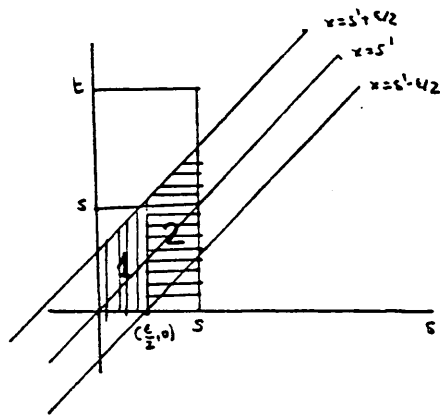
$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon/2} dx \int_0^{x+\epsilon/2} ds' e^{-\alpha(s'-x)} = \frac{1}{\alpha\epsilon} \left[\frac{1}{\alpha} (e^{\alpha\epsilon/2} - 1) - \frac{\epsilon}{2} e^{-\alpha\epsilon/2} \right] \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0,$$

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon/2}^t dx \int_{x-\epsilon/2}^{x+\epsilon/2} ds' e^{-\alpha(s'-x)} = \frac{1}{\alpha\epsilon} (e^{\alpha\epsilon/2} - e^{-\alpha\epsilon/2}) \left(t - \frac{\epsilon}{2} \right) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0,$$

con lo que

$$I = t.$$

b) $\min(t, s) = s$



$$I = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (I_1 + I_2)$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{\epsilon} \int_0^{\epsilon/2} ds' \int_0^{s'+\epsilon/2} dx e^{-\alpha(s'-x)},$$

$$I_2 = \frac{1}{\epsilon} \int_{\epsilon/2}^s ds' \int_{s'-\epsilon/2}^{s'+\epsilon/2} dx e^{-\alpha(s'-x)},$$

que es el mismo caso que el anterior pero cambiando $t \rightarrow s$ y $\alpha \rightarrow -\alpha$, con lo que

$$I = s,$$

resultando

$$\int_0^t dx \int_0^s ds' e^{-\alpha(s'-x)} \delta(s' - x) = \begin{cases} t & \min(t, s) = t, \\ s & \min(t, s) = s. \end{cases} \quad (C.3)$$

Todas las integrales dobles que aparecen en las soluciones de las ecuaciones de Langevin para ϕ^4 y SG cuando $v \ll 1$, se reducen a alguna de las anteriores.

4. Cálculo de $\langle z^2(t) \rangle$ en SG para $v \ll 1$

Las ecuaciones de la dinámica de SG en el caso no relativista vienen dadas por (5.49), cuya solución $z(t)$ es de la forma

$$\begin{aligned} z(t) = & z_0 + \frac{v_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + v_0 h \int_0^t ds e^{-\alpha s} V(s) + \\ & + \frac{\pi^2}{4} \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} V(s') + \\ & + \frac{\pi^2}{4} h \int_0^t ds \int_0^s ds' e^{\alpha(s'-s)} V(s) V(s'). \end{aligned}$$

Al calcular $\langle z^2(t) \rangle$ aparece la integral

$$\begin{aligned} \int_0^t ds \int_0^t dx \int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'-s+z'-z)} \langle V(s) V(s') V(x) V(x') \rangle = \\ = (2D)^2 (G_1 + G_2 + G_3) \end{aligned}$$

donde

$$G_1 \equiv \int_0^t ds \int_0^t dx \int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'-s+z'-z)} \delta(s-s') \delta(x-x'),$$

$$G_2 \equiv \int_0^t ds \int_0^t dx \int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'-s+z'-z)} \delta(s'-x') \delta(s-x),$$

$$G_3 \equiv \int_0^t ds \int_0^t dx \int_0^s ds' \int_0^x dx' e^{\alpha(s'-s+x'-x)} \delta(s'-x) \delta(s-x').$$

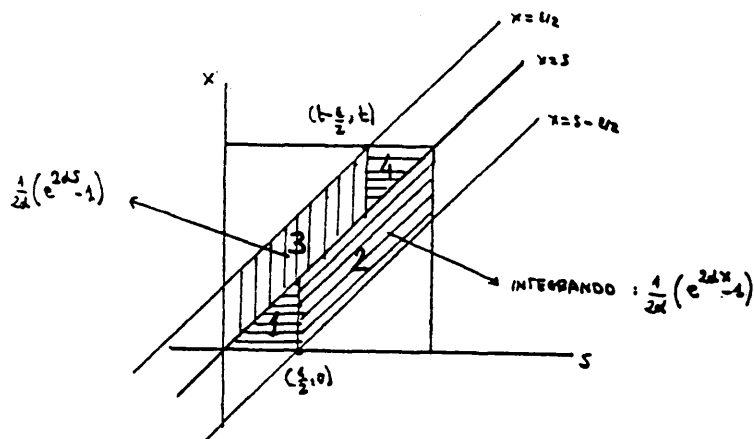
Calculemos ahora G_1, G_2 y G_3 . G_1 se puede calcular fácilmente con (C.1), resultando

$$G_1 = \frac{t^2}{4}.$$

Si empleamos (C.2) en G_2 , ésta se puede escribir como

$$G_2 = \int_0^t ds \int_0^t dx e^{-\alpha(s+x)} \delta(s-x) \times \begin{cases} \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha x} - 1) & \min(s, x) = x, \\ \frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha s} - 1) & \min(s, x) = s, \end{cases}$$

siendo el recinto de integración que tenemos que considerar por la definición de $\delta(x)$ el de la figura



y por lo tanto

$$G_2 = \lim_{\epsilon \downarrow 0} (g_1 + g_2 + g_3 + g_4),$$

donde

$$\begin{aligned}
 g_1 &\equiv \frac{1}{2\alpha\epsilon} \int_0^{\epsilon/2} ds \int_0^s dx e^{-\alpha(s+x)} (e^{2\alpha x} - 1) = \\
 &= \frac{1}{2\alpha^2\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{-\alpha\epsilon}) - \frac{2}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\epsilon/2}) \right) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0, \\
 g_2 &\equiv \frac{1}{2\alpha\epsilon} \int_{\epsilon/2}^t ds \int_{s-\epsilon/2}^s dx e^{-\alpha(s+x)} (e^{2\alpha x} - 1) = \\
 &\frac{1}{2\alpha^2\epsilon} \left((1 - e^{-\alpha\epsilon/2}) \left(t - \frac{\epsilon}{2} \right) - \frac{1}{2\alpha} (1 - e^{\alpha\epsilon/2}) (e^{-2\alpha t} - e^{-\alpha\epsilon}) \right) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \\
 &\rightarrow \frac{1}{4\alpha} \left(t + \frac{1}{2\alpha} (-1 + e^{-2\alpha t}) \right), \\
 g_3 &\equiv \frac{1}{2\alpha\epsilon} \int_0^{t-\epsilon/2} ds \int_s^{s+\epsilon/2} dx e^{-\alpha(s+x)} (e^{2\alpha s} - 1) = \\
 &\frac{1}{2\alpha^2\epsilon} (1 - e^{-\alpha\epsilon/2}) \left(\left(t - \frac{\epsilon}{2} \right) + \frac{1}{2\alpha} (e^{-2\alpha t} e^{\alpha\epsilon} - 1) \right) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} \\
 &\rightarrow \frac{1}{4\alpha} \left(t + \frac{1}{2\alpha} (-1 + e^{-2\alpha t}) \right), \\
 g_4 &\equiv \frac{1}{2\alpha\epsilon} \int_{t-\epsilon/2}^t ds \int_s^t dx e^{-\alpha(s+x)} (e^{2\alpha s} - 1) = \\
 &= \frac{1}{2\alpha^2\epsilon} \left(\frac{\epsilon}{2} + \frac{e^{-2\alpha t}}{2\alpha} (1 - e^{\alpha\epsilon}) - \frac{1}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\epsilon/2}) - \frac{1}{\alpha} e^{-2\alpha t} (1 - e^{\alpha\epsilon/2}) \right) \xrightarrow{\epsilon \downarrow 0} 0,
 \end{aligned}$$

lo que conduce a que

$$G_2 = \frac{1}{2\alpha} \left(t + \frac{1}{2\alpha} (e^{-2\alpha t} - 1) \right) \quad (\text{C.4})$$

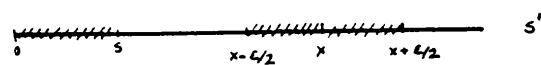
En cuanto a G_3 es nula porque son disjuntos los intervalos de integración y los conjuntos donde las deltas son distintas de cero,

$$G_3 = \int_0^t ds \int_0^t dx e^{-\alpha(s+x)} \int_0^s ds' e^{\alpha s'} \delta(s' - x) \int_0^x dx' e^{\alpha x'} \delta(s - x'),$$

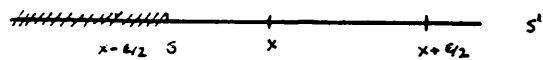
y pueden darse dos casos

$$\text{a) } \min(x, s) = s,$$

la integral $\int_0^s ds' e^{\alpha s'} \delta(s' - x)$ es nula porque



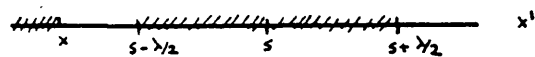
el intervalo de integración $[0, s]$ y el conjunto $[x - \epsilon/2, x + \epsilon/2]$ donde δ es distinta de cero son disjuntos. No podría darse el caso



porque entonces habría una $\int_{x-\epsilon/2}^s \frac{1}{e^{10}} \int_x^s$ y se tendría $\min(x, s) = x$, en contra de la hipótesis.

b) $\min(x, s) = x$.

en este caso la integral nula es $\int_0^x dx' e^{\alpha x'} \delta(s - x')$.



APENDICE D

1. Desarrollo asintótico de $\int_0^x dt e^{-t^2}$ cuando $x \rightarrow 0$

Si definimos $F(x)$ como

$$F(x) \equiv \int_0^x dt e^{-t^2},$$

desarrollando en serie de Taylor alrededor de $x = 0$, se tiene:

$$F(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)} \quad (\text{D.1})$$

que tiene radio de convergencia infinito.

2. Desarrollo asintótico de $\int_x^\infty dt e^{-t^2}$ cuando $x \rightarrow \infty$

Sea

$$G(x) \equiv \int_x^\infty dt e^{-t^2},$$

y por lo tanto

$$G(x) \equiv e^{-x^2} \int_x^\infty dt e^{-(t^2-x^2)}.$$

Haciendo el cambio de variable

$$u^2 = t^2 - x^2$$

se tiene que

$$G(x) = \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^\infty du u \left(1 + \frac{u^2}{x^2}\right)^{-1/2} e^{-u^2}$$

y si desarrollamos

$$\left(1 + \frac{u^2}{x^2}\right)^{-1/2}$$

en serie de potencias de $\frac{u^2}{x^2}$ para grandes x y efectuamos las correspondientes integrales, se llega al desarrollo

$$G(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{2x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 x^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 x^6} + \dots + \right. \\ \left. + (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n x^{2n}} + \dots \right), \quad x \gg \quad (D.2)$$

que era lo que buscábamos.

REFERENCIAS

- [1] V. N. Ginzburg y L. D. Landau, Zh. Exsp. Teor. Fiz 20, 1064 (1950) (en ruso), pero ampliamente discutido en A. L. Fetter y J. D. Walecka : " Quantum Theory of Many - Particles Systems, McGraw-Hill, (1971).
- [2] J. A. Krumhansl y J. R. Schrieffer : " Dynamics and Statistical Mechanics of a one-dimensional Model Hamiltonian for structural phase transitions ", Phys. Rev. B11, 3535 (1975).
- [3] R. Rajaraman : " Some non-perturbative semi-classical methods in Quantum Field Theory ", Phys. Repts. 21, 229 (1975).
- [4] J. Goldstone y R. Jackiw : " Quantization of non-linear Waves ", Phys. Rev D11, 1486 (1975).
- [5] M. Peyrard y D.K. Campbell: " Kink-antikink interactions in a Modified Sine-Gordon Model ", Physica 9D, 33 (1983).
- [6] D.K. Campbell, J.F. Schonfeld y Ch.A.Wingate: " Resonance Structure in Kink-antikink Interactions in ϕ^4 Theory ", Physica 9D, 1 (1983).
- [7] D.K. Campbell y M. Peyrard: " Solitary Waves Collision revisited ", Physica 18D, 47 (1983).
- [8] M.J. Ablowitz y H. Segur: " Solitons and the Inverse Scattering Transform ",

SIAM, Philadelphia (1981).

- [9] A.C. Newel: " Solitons in Mathematics and Physics ", SIAM, Philadelphia (1985).
- [10] D. W. Maclaughlin y A. C. Scott: " A restricted Bäcklund Transformations ", J. Math. Phys. 14, 12 (1973).
- [11] W. Strauss : " Non-linear Invariant Wave Equations ", Invariant Wave Equations, ed. G. Velo, Lecture Notes in Physics, Vol. 73, Springer- Verlag, Berlín (1978).
- [12] M. Wadati, H. Sanuki y K. Konno: " Relationships among Inverse Method, Bäcklund Transformations and Infinite Number of Conservation Laws ", Prog. Theor. Phys. 53, 419 (1975).
- [13] " Solitons in Action ", eds. K. Lonngren y A. Scott, Academic Press, Nueva York (1978).
- [14] " Nonlinear Wave Motion ", eds. A. C. Newell, Lectures in Applied Mathematics, Vol. 15, American Mathematical Society (1974).
- [15] R. Rajaraman: " Solitons and Instantons ", North- Holland, Amsterdam (1982).
- [16] P. L. Bhatnagar: " Non- linear Waves in dispersive systems", Clarendon Press, Oxford (1979).
- [17] J. Weiss, M. Tabor y G. Carnevale: " The Painlevé Property for Partial Differential Equations ", J. Math. Phys. 24, 522 (1983).

- [18] M.J. Ablowitz y A. Ramani: " Nonlinear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of Painlevé Type ". Lett. Nuovo Cim. **23**, 333 (1978).
- [19] M.J. Ablowitz , A. Ramani y H. Segur: " A connection between Non-linear Evolution Equations and Ordinary Differential Equations of P-type ". I: J. Math. Phys. **21** 715 (1980). II: J. Math. Phys. **21**, 1006 (1980).
- [20] E. L. Ince: " Ordinary Differential Equations ", Dover, Nueva York (1944).
- [21] E. Hille : " Ordinary Differential Equations in the Complex Domain", Jonh Wiley&Sons, Nueva York (1976).
- [22] A. Galindo y P. Pascual: " Mecánica cuántica ", Alhambra, Madrid (1978).
- [23] M. Abramowitz e I.A. Stegun: " Handbook on Mathematical Functions ", novena edición, Dover Publications, New York (1970).
- [24] I.M. Guelfand y G. E. Chilov: " Les distributions ", ed. Dunod, Paris (1962).
- [25] M. B. Fogel, S. E. Trullinger, A. R. Bishop y J. A. Krumhansl: " Dynamic of Sine- Gordon Solitons in the presence of perturbations ", Phys. Rev. **B15**, 1578 (1977).
- [26] K. H. Spatschek: " Adiabatic Behavior of Sine-Gordon Solitons in the Presence of Perturbations ", Z. Physik **B32**, 425 (1979).
- [27] D. J. Kaup y A. C. Newell: " Solitons as particles, oscillators, and in slowly changing media: a singular Perturbation Theory ", Proc. R. Soc. London **A361**, 413 (1978).
- [28] D. W. McLaughlin y A. Scott: " Perturbation analysis of fluxon dynamics ",

Phys. Rev A **18**, 1652 (1978).

- [29] F. G. Bass, Yu. S. Kivshar, V.V. Konotop y Yu. A. Sinitsyn: " Dynamics of Solitons under Random Perturbations ", Phys. Rep. **157**, 63 (1988).
- [30] C. M. Bender y S. A. Orszag: " Advanced Mathematical Methods for Scientist and Engineers ", McGraw- Hill, Singapur (1984).
- [31] V. I. Karpman y E. M. Maslov: " Structure of tails produced under the action of perturbations on solitons ", Sov. Phys. JETP **48**, 262 (1978).
- [32] C. J. Knickerbocher y A. C. Newell: " Shelves on the Korteweg-de Vries equation ", J. Fluid. Mech. **98**, 803 (1980).
- [33] Otra referencia de interés en el Capítulo 4 es H. Taten: " Behavior of solutions in extended Klein- Gordon systems approaching asymptotically stationary outgoing solitary-wave solutions ", Phys. Rev. **B36**, 2170 (1987).
- [34] G. E. Unlenbeck y L. S. Ornstein: " On the theory of the Brownian Motion ", Phys. Rev. **36**, 823 (1930).
- [35] S. Chandrasekar: " Stochastic Problems in Physics and Astronomy ", Rev. Mod. Phys. **15**, 1 (1943).
- [36] Las referencias [34, 35] y otros artículos están también en N. Wax (ed.): " Selected papers on Noise and Stochastic Processes ", Dover, Nueva York (1959).
- [37] H. Haken: " Cooperative phenomena in systems far from Thermal Equilibrium and in Nonphysical Systems ", Rev. Mod. Phys. **47**, 68 (1975).
- [38] N. G. Van Kampen: " Stochastic Differential Equations ", Phys. Reports **24**,

171 (1976).

- [39] H. Risken: " The Fokker-Planck Equation ", Springer-Verlag, Berlín (1984).
- [40] P. J. Pascual y L. Vázquez: " Sine-Gordon solitons under weak Stochastic Perturbations ", Phys. Rev. **32B**, 8305 (1985).
- [41] Otras referencias interesantes en el Capítulo 5 son [41], [42], [43], [44] y [45]. Y. Wada y J. R. Schrieffer: " Brownian Motion of a domain wall and the diffusion constants ", Phys. Rev. **B18**, 3897 (1978).
- [42] C. W. Gardiner: " Handbook of Stochastic Methods ", Springer Series in Synergetics, Vol. 13, Springer- Verlag, Berlín- Heidelberg- Nueva York (1983).
- [43] N. G. Van Kampen: " Stochastic Processes in Physics and Chemistry ", North-Holland, Amsterdam (1981).
- [44] P. Hänggi y H. Thomas: " Stochastic Processes: Time evolution, Symmetries and Linear Response ", Phys. Repts. **88**, 207 (1982).
- [45] R. Eykholt, A. R. Bishop y P. S. Lomdhal: " A non- equilibrium- to- equilibrium mapping and its application to the perturbed Sine- Gordon Equation ", Physica **23D**, 102 (1986).
- [46] R. Richtmyer y K. Morton : "Difference Methods for Initial Value Problems ", Wiley- Interscience, Nueva York (1967).
- [47] Guo- Ben- Yu, P. J. Pascual, M. J. Rodríguez y L. Vázquez: " Numerical solution of the Sine- Gordon Equation ", Appl. Math. and Comp. **18**, 1 (1986).

- [48] Guo- Ben- Yu y L. Vázquez: " A Numerical Scheme for non-linear Klein-Gordon Equations ", J. Applied Sciences, 1, 25 (1983).
- [49] J. Legras: " Methodes et Techniques de l'analyse Numerique ", Dunod, Paris (1971).